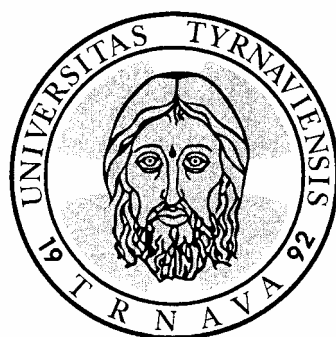


# ACTA

FACULTATIS PAEDAGOGICAE  
UNIVERSITATIS TYRNAVENSIS



Séria C  
MATEMATIKA, FYZIKA, INFORMATIKA

Trnava  
2004

## **Zborník Pedagogickej fakulty Trnavskej univerzity**

**Séria C – MATEMATIKA, FYZIKA, INFORMATIKA**

**Hlavný redaktor:**

doc. RNDr. Peter Čerňanský, CSc.

**Zostavovateľ:**

doc. RNDr. Pavel Híc, CSc.

**Redakčná rada:**

doc. RNDr. Pavel Híc, CSc. (**predseda**)

prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.

prof. RNDr. Zoltán Zalabai, CSc.

doc. RNDr. Peter Čerňanský, CSc.

doc. RNDr. Mária Lucká, CSc.

doc. Ing. Martin Mišút, CSc.

doc. RNDr. Jozef Zámožík, CSc.

**Recenzenti:**

prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.

prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.

prof. RNDr. Zoltán Zalabai, CSc.

doc. RNDr. Pavel Híc, CSc.

doc. RNDr. Mária Lucká, CSc.

doc. PhDr. Oliver Židek, CSc.

RNDr. Róbert Vrábel, PhD.

Bližšie informácie týkajúce sa objednávok alebo výmeny zborníka zasielajte na adresu:

Pedagogická fakulta TU

Oddelenie pre vedu, výskum a zahraničné styky

Priemyselná 4, P.O.Box 9

SK-918 43 TRNAVA

tel.: 033 / 55 16 047, e-mail: [mdrdulov@truni.sk](mailto:mdrdulov@truni.sk)

## O MONOMIÁLNYCH KRIVKÁCH $C(2k - 1, 2k, 2k + 1, 3k)$

MICHAELA HOLEŠOVÁ

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta prírodných vied,  
Žilinská univerzita v Žiline,  
Hurbanova 15, 010 26 Žilina  
e-mail: michaela.holesova@fpv.utc.sk

**Abstract:** HOLEŠOVÁ, M.: Monomial curves  $C(2k - 1, 2k, 2k + 1, 3k)$ . Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2004, no. 8, pp. 5 – 12.

We pay our attention to monomial curves  $C(2k - 1, 2k, 2k + 1, 3k)$  in 4-dimensional affine space  $A^4$  in this article. We prove that they are an intersection of three hypersurfaces and we will find their concrete description. These curves are set-theoretical complete intersections.

**Key words:** monomial curve, associate prime ideal, set-theoretical complete intersection

### 1. Úvod a základné pojmy

Monomiálne krivky sa študujú v súvislosti s hľadáním riešenia známeho problému: Nájst' najmenší počet plôch, ktorých prienikom je daná algebraická afinná varieta v  $n$ -rozmernom afinnom priestore. Je známe, že pre  $d$ -rozmernú algebraickú afinnú varietu v  $n$ -rozmernom priestore nie je tento počet menší od čísla  $n - d$ . Je vyslovená hypotéza, že každá algebraická afinná varieta je prienikom práve  $n - d$  nadplôch. Rozhodnúť o pravdivosti tejto hypotézy zatiaľ nevieme vo všeobecnosti ani pre monomiálne krivky. Pre monomiálne krivky v 3-rozmernom afinnom priestore ukázal pravdivosť tejto hypotézy E. Kunz v [2]. Niektoré čiastočné výsledky sú známe aj pre monomiálne krivky v 4-rozmernom afinnom priestore  $A^4$  a sú uvádzané v prácach [4], [6], [7]. V tomto článku ukážeme, že vyslovená hypotéza je pravdivá pre ďalšiu triedu monomiálnych kriviek  $C(2k - 1, 2k, 2k + 1, 3k)$  v  $A^4$ .

Množinu bodov  $C = \left\{ (T^{n_1}, T^{n_2}, T^{n_3}, T^{n_4}) \mid T \in K, n_i \in N, i = 1, \dots, 4 \right\}$  v afinnom priestore  $A^4$  nad ľubovoľným poľom  $K$  nazývame monomiálna krivka  $C = C(n_1, n_2, n_3, n_4)$ , pričom  $H = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$  je numerická pogrúpa, kde  $(n_1, n_2, n_3, n_4) = 1$ . Ku každej monomiálnej krivke  $C$  existuje asociovaný prvoideál  $I$  z noetherovského okruhu  $R = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$  štyroch neurčitých nad poľom  $K$ . Ideál  $I$  je množina všetkých polynómov  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R$ , pre ktoré platí, že  $g(t^{n_1}, t^{n_2}, t^{n_3}, t^{n_4}) = 0$ , kde  $t$  je neurčitá nad  $K$ .

Podrobnejšie sa môžeme o vlastnostiach ideálov dočítať napríklad v knihách [2], [3]. Zistiť najmenší počet plôch, ktorých prienikom je monomiálna krivka, úzko súvisí s číslami  $\mu(I)$ ,  $ht(I)$ , kde  $\mu(I)$  je počet generátorov asociovaného prvoideálu  $I$  k monomiálnej krivke  $C$  a  $ht(I)$  je výška tohto ideálu. V noetherovskom okruhu  $R$  pre ľubovoľný ideál  $J \neq (1)$  platí:  $ht(J) \leq \mu(J)$ , pričom pre asociovaný prvoideál  $I$  k monomiálnej krivke  $C$  v  $A^4$  platí  $ht(I) = 3$ .

---

Tento článok vznikol s podporou grantu VEGA 2/4138/24.

Pre prípad, keď  $\mu(\mathbf{I}) = \text{ht}(\mathbf{I}) = 3$ , sa asociovaný prvoideál  $\mathbf{I}$  (monomiálna krivka  $C$  v  $A^4$ ) nazýva ideálovým úplným prienikom.

V prípade, že asociovaný prvoideál  $\mathbf{I} = \text{Rad}(a_1, a_2, a_3)$ , kde polynómy  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{I}$  a ideál  $\text{Rad}(a_1, a_2, a_3)$  je radikál ideálu  $(a_1, a_2, a_3)$ , sa ideál  $\mathbf{I}$  (monomiálna krivka  $C$  v  $A^4$ ) nazýva množinovým úplným prienikom.

V oboch prípadoch je krivka prienikom troch nadplôch. O tom, že tieto plochy nemusia byť určené jednoznačne, hovorí nasledujúca veta.

**Veta 1.** Nech je daný asociovaný prvoideál  $\mathbf{I} = \text{Rad}(P, F, G)$  k monomiálnej krivke  $C$  v  $A^4$ .

Nech existuje polynóm  $g \in \mathbf{R}$  a polynóm  $W \in \mathbf{I}$  tak, že  $gW \equiv P \pmod{(F, G)}$ . Potom platí  $\mathbf{I} = \text{Rad}(W, F, G)$ .

Z predpokladu vyplýva, že  $P \in (W, F, G)$ ,  $(P, F, G) \subseteq (W, F, G) \subseteq \mathbf{I}$ .

Teda  $\mathbf{I} \subseteq \text{Rad}(P, F, G) \subseteq \text{Rad}(W, F, G) \subseteq \mathbf{I}$ , t.j.  $\mathbf{I} = \text{Rad}(W, F, G)$ .

## 2. Asociovaný prvoideál k monomiálnej krivke $C(2k-1, 2k, 2k+1, 3k)$

V tomto odstavci presne opíšeme asociovaný prvoideál  $\mathbf{I}$  k zvolenej triede monomiálnych kriviek. Ukážeme, že  $\mu(\mathbf{I}) = 5$ . Z toho je zrejmé, že tieto krivky nie sú úplným prienikom a sú prienikom najviac piatich nadplôch.

**Veta 2.** Nech je daná krivka  $C(2k-1, 2k, 2k+1, 3k)$  v  $A^4$ , kde  $k \geq 3$ ,  $k \in N$  a nech

- a)  $k = 2s, s \geq 2, s \in N$ ,
- b)  $k = 2r + 1, r \geq 2, r \in N$ ;

potom asociovaný prvoideál  $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$  k tejto krivke má minimálnu bázu

- a)  $\mathbf{I} = (x_1^{s+1} - x_3^{s-1}x_4, x_2^2 - x_1x_3, x_3^{s+1} - x_1^{s-1}x_2x_4, x_4^2 - x_1x_2x_3, x_1^s x_4 - x_2x_3^s)$
- b)  $\mathbf{I} = (x_1^{r+2} - x_2x_3^{r-1}x_4, x_2^2 - x_1x_3, x_3^{r+1} - x_1^r x_4, x_4^2 - x_1x_2x_3, x_1^{r+1}x_2 - x_3^r x_4)$ .

Nech  $\mathbf{I} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$  je pre obidve podtriedy. Prejdeme k homogénnym súradniciam. Ak  $(T^{m_1}, T^{m_2}, T^{m_3}, T^m)$  je všeobecný bod pre nehomogénny prvoideál  $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$ , tak  $(t_0^m, t_0^{m-m_1}t_1^{m_1}, t_0^{m-m_2}t_1^{m_2}, t_0^{m-m_3}t_1^{m_3}, t_1^m)$  je všeobecný bod pre odpovedajúci homogénny prvoideál

$\mathbf{HI} \subset K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ , pričom  $T = \frac{t}{t_0}$  [1, kap.3, veta 12], odhomogenizáciou minimálnej bázy

prvoideálu  $\mathbf{HI}$  získame bázu prvoideálu  $\mathbf{I}$  [1, kap.1, veta 14].

Je zrejmé, že binómy  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ , ktoré patria do prvoideálu  $\mathbf{HI}$  pre všeobecný bod  $(t_0^m, t_0^{m-m_1}t_1^{m_1}, t_0^{m-m_2}t_1^{m_2}, t_0^{m-m_3}t_1^{m_3}, t_1^m)$ , kde

- a)  $m_1 = 4s - 1, m_2 = 4s, m_3 = 4s + 1, m = 6s$
- b)  $m_1 = 4r + 1, m_2 = 4r + 2, m_3 = 4r + 3, m = 6r + 3$  a

sú v tvare

- a)  $f_1 = x_1^{s+1} - x_0x_3^{s-1}x_4, f_2 = x_2^2 - x_1x_3, f_3 = x_3^{s+1} - x_1^{s-1}x_2x_4, f_4 = x_0x_4^2 - x_1x_2x_3,$   
 $f_5 = x_1^s x_4 - x_2x_3^s$
- b)  $f_1 = x_1^{r+2} - x_0x_2x_3^{r-1}x_4, f_2 = x_2^2 - x_1x_3, f_3 = x_3^{r+1} - x_1^r x_4, f_4 = x_0x_4^2 - x_1x_2x_3,$   
 $f_5 = x_1^{r+1}x_2 - x_0x_3^r x_4$

(Môžeme tieto binómy vypočítať aj podľa algoritmu uvedeného v [1, kap.6, ods. 6.7].)

Označme  $\mathbf{HJ} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Keďže uvedené binómy patria do ideálu  $\mathbf{HI}$ , platí  $\mathbf{HJ} \subseteq \mathbf{HI}$ . Náš predpoklad je, že sú to aj formy minimálnej bázy prvoideálu  $\mathbf{HI}$ , t. j. je ešte potrebné dokázať, že  $\mathbf{HI} \subseteq \mathbf{HJ}$ . V báze ideálu  $\mathbf{HI}$  sa môžu vyskytovať binómy typu

- (A)  $x_i^a - x_j^a$ ,  $a \in Z^+$   
 (B)  $x_i^a x_j^b - x_k^{a+b}$ ,  $a, b \in Z^+$   
 (C)  $x_i^a x_j^b x_k^c - x_l^{a+b+c}$ ,  $a, b, c \in Z^+$   
 (D)  $x_i^a x_j^b - x_k^c x_l^{a+b-c}$ ,  $a, b, c, a+b-c \in Z^+$   
 (E)  $x_i^a x_j^b x_k^c x_l^d - x_n^{a+b+c+d}$ ,  $a, b, c, d \in Z^+$   
 (F)  $x_i^a x_j^b x_k^c - x_l^d x_n^{a+b+c-d}$ ,  $a, b, c, d, a+b+c-d \in Z^+$ , [1, kap.6, ods.6.8].

Počet všetkých možných druhov binómov je 90. Berieme do úvahy iba tie binómy, ktoré sú anulované bodmi krivky určenej rovnicami  $y_0 = t_0^m, y_1 = t_0^{m-m_1} t_1^{m_1}, y_2 = t_0^{m-m_2} t_1^{m_2}, y_3 = t_0^{m-m_3} t_1^{m_3}, y_4 = t_1^m$ , kde

$$(*) \quad (m_1, m_2, m_3, m) = 1, 1 \leq m_1 < m_2 < m_3 \leq m - 1.$$

Formy typu (A) sa v báze nevyskytujú, čo jednoducho dokážeme pre všetky formy tohto typu rovnako ako napríklad pre binóm  $x_0^a - x_1^a$ . Aby tento binóm patril ideálu **HI**, musí platiť  $y_0^a - y_1^a = t_0^{ma} - t_0^{ma-m_1a} t_1^{m_1a} = 0$ , t. j.  $m_1 a = 0$ ,  $m_1 \neq 0$ , teda  $a = 0$ , ale  $a \in Z^+$ . Z toho vyplýva, že tento binóm neleží v **HI**. Analogicky sme postupovali aj pre ostatné typy. Uvedieme ešte aspoň jeden prípad, keď z typu (F) vyberieme možnosť  $(i, j, k, l, n) = (0, 1, 2, 3, 4)$ . Z rovnosti

$$\begin{aligned} y_0^a y_1^b y_2^c - y_3^d y_4^{a+b+c-d} &= t_0^{ma} t_0^{mb-m_1b} t_1^{m_1b} t_0^{mc-m_2c} t_1^{m_2c} - t_0^{md-m_3d} t_1^{m_3d} t_1^{ma+mb+mc-md} \\ &= t_0^{ma+mb+mc-m_1b-m_2c} t_1^{m_1b+m_2c} - t_0^{md-m_3d} t_1^{ma+mb+mc+m_3d-md} \end{aligned}$$

dostaneme pre exponenty podmienku  $ma + mb + mc - m_1b - m_2c - md + m_3d = 0$ , teda  $(m-m_3)d = ma + (m-m_1)b + (m-m_2)c$ ,  $a, b, c, d, a+b+c-d \in Z^+$ .

Zo vzťahov (\*) dostaneme, že  $m > m-m_1 > m-m_2 > m-m_3 \geq 1$ ,

$(m-m_3)(a+b+c) > (m-m_3)d = ma + (m-m_1)b + (m-m_2)c$ , a teda tento binóm nemôže patriť ideálu **HI**. Postupným overením všetkých binómov nám zostalo 41 druhov binómov, ktoré môžu patriť do ideálu **HI** a to:

Typu (B) :

$$\begin{aligned} &x_0^a x_2^b - x_1^{a+b}, x_0^a x_3^b - x_1^{a+b}, x_0^a x_3^b - x_2^{a+b}, x_0^a x_4^b - x_1^{a+b}, \\ &x_0^a x_4^b - x_2^{a+b}, x_0^a x_4^b - x_3^{a+b}, x_1^a x_3^b - x_2^{a+b}, x_1^a x_4^b - x_2^{a+b}, \\ &x_1^a x_4^b - x_3^{a+b}, x_2^a x_4^b - x_3^{a+b}, \end{aligned}$$

Typu (C):

$$\begin{aligned} &x_0^a x_2^b x_3^c - x_1^{a+b+c}, x_0^a x_2^b x_4^c - x_1^{a+b+c}, x_0^a x_3^b x_4^c - x_1^{a+b+c}, \\ &x_0^a x_1^b x_3^c - x_2^{a+b+c}, x_0^a x_1^b x_4^c - x_2^{a+b+c}, x_0^a x_3^b x_4^c - x_2^{a+b+c}, x_1^a x_3^b x_4^c - x_2^{a+b+c}, \\ &x_0^a x_1^b x_4^c - x_3^{a+b+c}, x_0^a x_2^b x_4^c - x_3^{a+b+c}, x_1^a x_2^b x_4^c - x_3^{a+b+c}, \end{aligned}$$

Typu (D):

$$\begin{aligned} &x_0^a x_2^b - x_1^c x_3^{a+b-c}, x_0^a x_2^b - x_1^c x_4^{a+b-c}, x_0^a x_3^b - x_1^c x_2^{a+b-c}, \\ &x_0^a x_3^b - x_1^c x_4^{a+b-c}, x_0^a x_3^b - x_2^c x_4^{a+b-c}, x_0^a x_4^b - x_1^c x_2^{a+b-c}, \\ &x_0^a x_4^b - x_1^c x_3^{a+b-c}, x_0^a x_4^b - x_2^c x_3^{a+b-c}, x_1^a x_3^b - x_2^c x_4^{a+b-c}, x_1^a x_4^b - x_2^c x_3^{a+b-c}, \end{aligned}$$

Typu (E):

$$x_0^a x_2^b x_3^c x_4^d - x_1^{a+b+c+d}, x_0^a x_1^b x_3^c x_4^d - x_2^{a+b+c+d}, x_0^a x_1^b x_2^c x_4^d - x_3^{a+b+c+d},$$

Typu (F):

$$\begin{aligned} & x_1^a x_3^b x_4^c - x_0^d x_2^{a+b+c-d}, x_1^a x_2^b x_4^c - x_0^d x_3^{a+b+c-d}, x_1^a x_2^b x_3^c - x_0^d x_4^{a+b+c-d}, \\ & x_0^a x_3^b x_4^c - x_1^d x_2^{a+b+c-d}, x_0^a x_2^b x_4^c - x_1^d x_3^{a+b+c-d}, x_0^a x_2^b x_3^c - x_1^d x_4^{a+b+c-d}, \\ & x_0^a x_1^b x_4^c - x_2^d x_3^{a+b+c-d}, x_0^a x_1^b x_3^c - x_2^d x_4^{a+b+c-d}. \end{aligned}$$

Na konkrétnom prípade binómu z typu (B) pre podtriedu a) ukážeme postup, ktorý využívame pri overovaní, či uvedené formy z ideálu **HI** patria aj do ideálu **HJ**. Aby binóm  $x_0^a x_2^b - x_1^{a+b}$  patril do ideálu **HI**, musí

$$\begin{aligned} y_0^a y_2^b - y_1^{a+b} &= t_0^{ma} t_0^{mb-m_2b} t_1^{m_2b} - t_0^{ma+mb-m_1a-m_1b} t_1^{m_1a+m_1b} \\ &= t_0^{ma+mb-m_2b} t_1^{m_2b} - t_0^{ma+mb-m_1a-m_1b} t_1^{m_1a+m_1b} = 0. \end{aligned}$$

Pre exponenty z toho vyplýva, že  $m_2b - m_1a - m_1b = 0$ , teda  $(m_2 - m_1)b = m_1a$ . Je zřejmé, že tento binóm je z ideálu **HI** práve vtedy, keď  $b = (4s - 1)a$ . Poďme skúmať, či patrí ideálu **HJ**.

$$x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_1^{4sa} \equiv x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_0^{2a} x_1^{(2s-2)a} x_3^{(2s-2)a} x_4^{2a} \pmod{(f_1)},$$

$$x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_0^{2a} x_1^{(2s-2)a} x_3^{(2s-2)a} x_4^{2a} \equiv x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_0^a x_1^{(2s-1)a} x_2^a x_3^{(2s-1)a} \pmod{(f_4)},$$

$$x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_0^a x_1^{(2s-1)a} x_2^a x_3^{(2s-1)a} \equiv 0 \pmod{(f_2)},$$

alebo inak

$$x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_1^{4sa} \xrightarrow{f_1} x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_0^{2a} x_1^{(2s-2)a} x_3^{(2s-2)a} x_4^{2a} \xrightarrow{f_4}$$

$$\xrightarrow{f_4} x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_0^a x_1^{(2s-1)a} x_2^a x_3^{(2s-1)a} \xrightarrow{f_2} x_0^a x_2^a (x_1 x_3)^{(2s-1)a} - x_0^a x_1^{(2s-1)a} x_2^a x_3^{(2s-1)a} = 0, \quad \text{pričom}$$

znakom  $\xrightarrow{f_n}$ ,  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  označujeme zmenu ľubovoľného polynómu spôsobenú pričítaním vhodného násobku binómu  $f_n$ . Tento postup je známy z [4].

Z oboch nám však vyplýva, že

$$x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_1^{4sa} \equiv 0 \pmod{(f_1, f_2, f_4)}, \text{ ale } (f_1, f_2, f_4) \subset \mathbf{HJ}, \text{ t.j. } x_0^a x_2^{(4s-1)a} - x_1^{4sa} \in \mathbf{HJ}.$$

Analogicky by sme postupovali aj pre ostatné spomínané binómy a overili by sme, že naozaj všetky formy už patria do ideálu **HJ**, čo však pre rozsiahlosť nebudeme uvádzať. Z uvedeného nám vyplýva, že  $\mathbf{HI} = \mathbf{HJ} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Odhomogenizovaním minimálnej bázy ideálu **HI** získame bázu ideálu  $\mathbf{I} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ . Je zřejmé, že báza musí obsahovať binómy  $F_1, F_2, F_3, F_4$ . Keďže binóm  $F_5$  nie je deliteľný žiadnym z binómov  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , binóm  $F_5$  nie je z ideálu  $(F_1, F_2, F_3, F_4)$ , teda získaná báza

je minimálna.

### 3. Monomiálna krivka $C(2k - 1, 2k, 2k + 1, 3k)$ ako množinový úplný prienik

V tejto časti ukážeme, že na určenie skúmanej triedy kriviek nám stačia tri nadplochy, čo znamená, že tieto krivky sú množinovým úplným prienikom. V dôkaze nasledujúcej vety použijeme metódu prezentovanú v článku [5]. Táto metóda nám umožní nájsť konkrétne vyjadrenie spomínaných nadplôch.

**Veta 3.** Nech je daná krivka  $C(2k - 1, 2k, 2k + 1, 3k)$  v  $A^4$ , kde  $k \geq 3$ ,  $k \in N$ . Potom asociovaný prvoideál  $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$  k tejto krivke je množinový úplný prienik.

Pre dôkaz vety 3 budeme potrebovať nasledovné dve tvrdenia.

**Lema 1.** Nech  $\mathbf{I} = (F_1, F_2, \dots, F_s) \subset \mathbf{R}$  je asociovaný prvoideál k monomiálnej krivke  $C(n_1, n_2, n_3, n_4)$  v  $A^4$ . Nech je daný ideál  $L = (F_h, F_q)$  [ $h \neq q$ ,  $h, q \in \{1, 2, \dots, s\}$ ], kde  $F_h = x_1^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$ ,

$F_q = x_j^{r_j} - x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}}$  a platí:  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1,2,3,4\}$ ,  $k \neq l$ ,  $k, l \in \{1,2,3,4\} - \{i, j\}$ ,  $\alpha_{jk} \neq 0$ ,  $\alpha_{jl} \neq 0$ ,  $\alpha_{ij} < r_j$  a aspoň dve  $\alpha_{im} \neq 0$  pre  $m \in \{1,2,3,4\} - \{i\}$ . Potom  $(R/L, \oplus)$  spolu s operáciou násobenia • definovanou tak, že pre  $\forall a \in K[x_k, x_l], \forall \bar{f} \in R/L, a \cdot \bar{f} = \overline{af}$ , je voľný modul nad  $K[x_k, x_l]$ .

Dôkaz nájdeme napríklad v článku [5].

**Dôsledok 1.** Ak ideál  $L = (F_h, F_q)$  má vlastnosti uvedené vo vete 2, tak  $x_k^t x_l^p f \equiv 0 \pmod L$ , kde  $f \in \mathbf{R}$ ,  $t, p \in \mathbb{Z}_0^+$ , práve vtedy, keď  $f \equiv 0 \pmod L$ .

Na základe vety 2 má asociovaný prvoideál bázu pre jednotlivé triedy

$$a) \quad \mathbf{I} = (x_1^{s+1} - x_3^{s-1} x_4, x_2^2 - x_1 x_3, x_3^{s+1} - x_1^{s-1} x_2 x_4, x_4^2 - x_1 x_2 x_3, x_1^s x_4 - x_2 x_3^s),$$

kde  $k = 2s, s \geq 2, s \in \mathbb{N}$ ,

$$b) \quad \mathbf{I} = (x_1^{r+2} - x_2 x_3^{r-1} x_4, x_2^2 - x_1 x_3, x_3^{r+1} - x_1^r x_4, x_4^2 - x_1 x_2 x_3, x_1^{r+1} x_2 - x_3^r x_4),$$

kde  $k = 2r + 1, r \geq 2, r \in \mathbb{N}$ .

Označme pre obidve podtriedy  $\mathbf{I} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ . Dôkaz pre každú podtriedu kriviek budeme robiť osobitne, pričom ukážeme, že  $\mathbf{I} = \text{Rad}(F_1, F_2, F_3, F_4)$  a využitím myšlienok z [5] skonštruujeme taký polynóm  $P \in \mathbf{I}$ , že  $\mathbf{I} = \text{Rad}(P, F, G)$ , kde  $F, G \in \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ .

Dôkaz pre podtriedu a).

Nech  $F_1 = x_1^{s+1} - x_3^{s-1} x_4, F_2 = x_2^2 - x_1 x_3, F_3 = x_3^{s+1} - x_1^{s-1} x_2 x_4, F_4 = x_4^2 - x_1 x_2 x_3, F_5 = x_1^s x_4 - x_2 x_3^s$ .

Platí  $(F_1, F_2, F_3, F_4) \subseteq \mathbf{I}$  a  $F_5^2 = x_1^{s-1} x_4^2 F_1 + x_3^{2s} F_2 + x_1 x_3^s F_3 + x_1^{s-1} x_3^{s-1} x_4 F_4$ , z toho nám vyplýva, že  $\mathbf{I} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) \subseteq \text{Rad}(F_1, F_2, F_3, F_4) \subseteq \text{Rad}(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$ .

Nech  $P = P_1, F = F_1, G = F_2$  a označme zmenu ľubovoľného polynómu pričítaním vhodnej kombinácie binómov  $F_1, F_2$  znakom  $\rightarrow$ .

$$F_4^{2(s+1)} = (x_1 x_2 x_3 - x_4^2)^{2(s+1)} = \sum_{j=0}^{2(s+1)} (-1)^j \binom{2(s+1)}{j} (x_1 x_2 x_3)^{2(s+1)-j} x_4^{2j} \rightarrow$$

$$[x_2^{2(s+1)} \rightarrow (x_1 x_3)^{s+1}, \text{pre } j=0; x_2^{2s+1} \rightarrow (x_1 x_3)^s x_2, \text{pre } j=1]$$

$$\rightarrow (x_1 x_3)^{3(s+1)} - 2(s+1)(x_1 x_3)^{3s+1} x_2 x_4^2 + \sum_{j=2}^{2(s+1)} (-1)^j \binom{2(s+1)}{j} (x_1 x_2 x_3)^{2(s+1)-j} x_4^{2j} \rightarrow$$

$$[x_1^{2(s+1)-j} = x_1^{s+1-j+s+1} \rightarrow x_1^{s+1-j} x_3^{s-1} x_4, \text{pre } j < s+1; \text{špeciálne pre } j=0: x_1^{3(s+1)} \rightarrow (x_3^{s-1} x_4)^3,$$

$$\text{pre } j=1: x_1^{3s+1} = x_1^{s-1+2(s+1)} \rightarrow x_1^{s-1} (x_3^{s-1} x_4)^2]$$

$$\rightarrow x_3^{6s} x_4^3 - 2(s+1)x_1^{s-1} x_2 x_3^{5s-1} x_4^4 + \sum_{j=2}^s (-1)^j \binom{2(s+1)}{j} x_1^{s+1-j} x_2^{2(s+1)-j} x_3^{3s+1-j} x_4^{2j+1} +$$

$$+ \sum_{j=s+1}^{2(s+1)} (-1)^j \binom{2(s+1)}{j} (x_1 x_2 x_3)^{2(s+1)-j} x_4^{2j} =$$

[ pričom  $j-1 > 0$  pre  $j \geq 2, 2j-3 > 0$  pre  $j \geq s+1$  ]

$$= x_4^3 (x_3^{6s} - 2(s+1)x_1^{s-1} x_2 x_3^{5s-1} x_4 + \sum_{j=2}^s (-1)^j \binom{2(s+1)}{j} x_1^{s+1-j} x_2^{2(s+1)-j} x_3^{3s+1-j} x_4^{2(j-1)} +$$

$$+ \sum_{j=s+1}^{2s+1} (-1)^j \binom{2(s+1)}{j} (x_1 x_2 x_3)^{2(s+1)-j} x_4^{2j-3} + x_4^{4s+1}) = x_4^3 P_1, \text{teda platí}$$

$F_4^{2(s+1)} + qF_1 + wF_2 = x_4^3 P_1$ , kde  $q, w \in \mathbf{R}$ , čo pomocou kongruencií môžeme zapísať  $F_4^{2(s+1)} \equiv x_4^3 P_1 \pmod{(F_1, F_2)}$ , a platí  $F_4 \in \text{Rad}(P_1, F_1, F_2)$ .  $P_1$  je z prvoideálu  $\mathbf{I}$ , pretože  $x_4^3 P_1 \in \mathbf{I}$  a  $x_4^3 \notin \mathbf{I}$ , teda  $\text{Rad}(P_1, F_1, F_2) \subseteq \mathbf{I}$ .

Rovnosť  $x_3^2 F_1 + x_1^s x_3 F_2 + x_4 F_3 + x_1^{s-1} x_2 F_4 = 0$  je ekvivalentná s

$x_4 F_3 \equiv -x_1^{s-1} x_2 F_4 \pmod{(F_1, F_2)}$ , teda aj

$$x_4^{2(s+1)} F_3^{2(s+1)} \equiv x_1^{2(s+1)(s-1)} x_2^{2(s+1)} F_4^{2(s+1)} \pmod{(F_1, F_2)},$$

$x_4^{2(s+1)} F_3^{2(s+1)} \equiv x_3^{2s^2-2s+2} x_4^{2s-1} F_4^{2(s+1)} \pmod{(F_1, F_2)}$  a súčasne  $F_4^{2(s+1)} \equiv x_4^3 P_1 \pmod{(F_1, F_2)}$ , t.j.

$$x_4^{2(s+1)} F_3^{2(s+1)} \equiv x_3^{2s^2-2s+2} x_4^{2(s+1)} P_1 \pmod{(F_1, F_2)}. \text{ Keďže } R/(F_1, F_2) \text{ je voľný modul nad } K[x_3, x_4]$$

(lema 1), z dôsledku 1 vyplýva, že aj  $F_3^{2(s+1)} \equiv x_3^{2s^2-2s+2} P_1 \pmod{(F_1, F_2)}$ ,  $F_3 \in \text{Rad}(P_1, F_1, F_2)$ . Z toho vyplýva, že  $(F_1, F_2, F_3, F_4) \subseteq \text{Rad}(P_1, F_1, F_2)$  a súčasne

$\mathbf{I} = \text{Rad}(F_1, F_2, F_3, F_4) \subseteq \text{Rad}(P_1, F_1, F_2) \subseteq \mathbf{I}$ . A tým je veta pre podtriedu a) dokázaná.

Dôkaz pre podtriedu b).

Označme  $F_1 = x_1^{r+2} - x_2 x_3^{r-1} x_4$ ,  $F_2 = x_2^2 - x_1 x_3$ ,  $F_3 = x_3^{r+1} - x_1^r x_4$ ,  $F_4 = x_4^2 - x_1 x_2 x_3$ ,  $F_5 = x_1^{r+1} x_2 - x_3^r x_4$ .

$F_5^2 = x_1^{r+1} x_3 F_1 + x_1^{2r+2} F_2 + x_3^{r-1} x_4^2 F_3 + x_1^r x_3^{r-1} x_4 F_4$ , teda analogicky ako pre prvú podtriedu je

$\mathbf{I} = \text{Rad}(F_1, F_2, F_3, F_4)$ .

Nech teraz  $P = P_2$ ,  $F = F_2$ ,  $G = F_3$  a označme zmenu ľubovoľného polynómu pričítaním vhodnej kombinácie binómov  $F_2, F_3$  znakom  $\mapsto$ .

$$F_4^{2(r+1)} = (x_1 x_2 x_3 - x_4^2)^{2(r+1)} = \sum_{j=0}^{2(r+1)} (-1)^j \binom{2(r+1)}{j} (x_1 x_2 x_3)^{2(r+1)-j} x_4^{2j} \mapsto$$

$$[x_2^{2(r+1)} \mapsto (x_1 x_3)^{r+1}, \text{ pre } j=0; x_2^{2r+1} \mapsto (x_1 x_3)^r x_2, \text{ pre } j=1]$$

$$\mapsto (x_1 x_3)^{3(r+1)} - 2(r+1)(x_1 x_3)^{3r+1} x_2 x_4^2 + \sum_{j=2}^{2(r+1)} (-1)^j \binom{2(r+1)}{j} (x_1 x_2 x_3)^{2(r+1)-j} x_4^{2j} \mapsto$$

$$[x_3^{2(r+1)-j} = x_3^{r+1-j+r+1} \mapsto x_3^{r+1-j} x_1^r x_4, \text{ pre } j < r+1; \text{ špeciálne pre } j=0: x_3^{3(r+1)} \mapsto (x_1^r x_4)^3,$$

$$\text{pre } j=1: x_3^{3r+1} = x_3^{r-1+2(r+1)} \mapsto x_3^{r-1} (x_1^r x_4)^2]$$

$$\mapsto x_1^{6r+3} x_4^3 - 2(r+1)x_1^{5r+1} x_2 x_3^{r-1} x_4^4 + \sum_{j=2}^r (-1)^j \binom{2(r+1)}{j} x_1^{3r+2-j} x_2^{2(r+1)-j} x_3^{r+1-j} x_4^{2j+1} +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{2(r+1)} (-1)^j \binom{2(r+1)}{j} (x_1 x_2 x_3)^{2(r+1)-j} x_4^{2j} =$$

[ pričom  $j-1 > 0$  pre  $j \geq 2$ ,  $2j-3 > 0$  pre  $j \geq r+1$ ]

$$= x_4^3 (x_1^{6r+3} - 2(r+1)x_1^{5r+1} x_2 x_3^{r-1} x_4 + \sum_{j=2}^r (-1)^j \binom{2(r+1)}{j} x_1^{3r+2-j} x_2^{2(r+1)-j} x_3^{r+1-j} x_4^{2(j-1)} +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{2r+1} (-1)^j \binom{2(r+1)}{j} (x_1 x_2 x_3)^{2(r+1)-j} x_4^{2j-3} + x_4^{4r+1}) = x_4^3 P_2, \text{ teda platí}$$

$$F_4^{2(r+1)} \equiv x_4^3 P_2 \pmod{(F_2, F_3)}, F_4 \in \text{Rad}(P_2, F_2, F_3).$$

$P_2$  je z prvoideálu  $\mathbf{I}$ , pretože  $x_4^3 P_2 \in \mathbf{I}$  a  $x_4^3 \notin \mathbf{I}$ , teda  $\text{Rad}(P_2, F_2, F_3) \subseteq \mathbf{I}$ .



Platí  $x_4 F_1 + x_1 x_3^r F_2 + x_1^2 F_3 + x_2 x_3^{r-1} F_4 = 0$  a to je ekvivalentné s

$$x_4 F_1 \equiv -x_2 x_3^{r-1} F_4 \pmod{(F_2, F_3)}, \text{ teda aj}$$

$$x_4^{2(r+1)} F_1^{2(r+1)} \equiv x_2^{2(r+1)} x_3^{2(r+1)(r-1)} F_4^{2(r+1)} \pmod{(F_2, F_3)}, \text{ po úprave}$$

$$x_4^{2(r+1)} F_1^{2(r+1)} \equiv x_1^{2r^2+1} x_4^{2r-1} F_4^{2(r+1)} \pmod{(F_2, F_3)}, \text{ a súčasne } F_4^{2(r+1)} \equiv x_4^3 P_2 \pmod{(F_2, F_3)}, \text{ t. j.}$$

$$x_4^{2(r+1)} F_1^{2(r+1)} \equiv x_1^{2r^2+1} x_4^{2(r+1)} P_2 \pmod{(F_2, F_3)}$$

Z lemy 1 a dôsledku 1 vyplýva, že aj  $F_1^{2(r+1)} \equiv x_1^{2r^2+1} P_2 \pmod{(F_2, F_3)}$ ,  $F_1 \in \text{Rad}(P_2, F_2, F_3)$ . Z toho vyplýva, že  $\mathbf{I} = \text{Rad}(F_1, F_2, F_3, F_4) \subseteq \text{Rad}(P_2, F_2, F_3) \subseteq \mathbf{I}$ . A tým je veta pre podtriedu b) dokázaná.

**Príklad 1.** Zoberme krivku  $C = (T^7, T^8, T^9, T^{12})$ , ktorá patrí do podtriedy a) pre  $s = 2$ . Jej asociovaný ideál má bázu  $\mathbf{I} = (x_1^3 - x_3 x_4, x_2^2 - x_1 x_3, x_3^3 - x_1 x_2 x_4, x_4^2 - x_1 x_2 x_3, x_1^2 x_4 - x_2 x_3^2)$ .

Na základe vety 3 je  $F_5^2 = x_1 x_4^2 F_1 + x_3^4 F_2 + x_1 x_3^2 F_3 + x_1 x_3 x_4 F_4$ , teda  $\mathbf{I} = \text{Rad}(F_1, F_2, F_3, F_4)$ .

Polynóm  $P_1$ , pre ktorý platí  $\mathbf{I} = \text{Rad}(P_1, F_1, F_2)$ , je

$$(x_3^{12} - 6x_1 x_2 x_3^9 x_4 + \sum_{j=2}^6 (-1)^j \binom{6}{j} x_1^{3-j} x_2^{6-j} x_3^{7-j} x_4^{2(j-1)} + \sum_{j=4}^5 (-1)^j \binom{6}{j} (x_1 x_2 x_3)^{6-j} x_4^{2j-3} + x_4^9) =$$

$$= (x_3^{12} - 6x_1 x_2 x_3^9 x_4 + 15x_1 x_2^4 x_3^5 x_4^2 - 20x_2^3 x_3^4 x_4^4 + 15(x_1 x_2 x_3)^2 x_4^5 - 6(x_1 x_2 x_3) x_4^7 + x_4^9).$$

Ďalším pričítaním kombinácie binómov  $F_1, F_2$  získame polynóm  $W_1 \equiv P_1 \pmod{(F_1, F_2)}$ , pre ktorý tiež platí  $\mathbf{I} = \text{Rad}(W_1, F_1, F_2)$ .

$$P_1 \mapsto W_1 = x_3^{12} - 6x_1 x_2 x_3^9 x_4 + 15x_3^8 x_4^3 - 20x_1 x_2 x_3^5 x_4^4 + 15x_3^4 x_4^6 - 6(x_1 x_2 x_3) x_4^7 + x_4^9.$$

Teraz hľadáme taký polynóm  $W_2 \in \mathbf{I}$ , že  $gW_2 \equiv P_1 \pmod{(F_1, F_2)}$ , pričom  $g \in \mathbf{R}$ .

$F_3^2 \equiv x_3^2 (x_3^4 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^3) \pmod{(F_1, F_2)}$ ; označme  $W_2 = x_3^4 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^3$ . Z vety 3 vieme, že  $F_3^6 \equiv x_3^6 P_1 \pmod{(F_1, F_2)}$  a súčasne je  $F_3^6 \equiv x_3^6 W_2^3 \pmod{(F_1, F_2)}$ . Využitím vlastností kongruencií a dôsledku 1 je  $P_1 \equiv W_2^3 \pmod{(F_1, F_2)}$ . Keďže  $W_2 = x_3 F_3 + x_4 F_4$ , je  $W_2 \in \mathbf{I}$ .

Na základe vety 1 je  $\mathbf{I} = \text{Rad}(W_2, F_1, F_2)$ , kde  $g = W_2^2$ . Vidíme, že krivka je prienikom troch nadplôch s rovnicami  $P_1 = 0, F_1 = 0, F_2 = 0$ , alebo aj nadplôch  $W_2 = 0, F_1 = 0, F_2 = 0$ .

**Príklad 2.** Nech je daná krivka  $C = (T^9, T^{10}, T^{11}, T^{15})$ , ktorá patrí do podtriedy b) pre  $r = 2$ . Jej asociovaný ideál má bázu  $\mathbf{J} = (x_1^4 - x_2 x_3 x_4, x_2^2 - x_1 x_3, x_3^3 - x_1^2 x_4, x_4^2 - x_1 x_2 x_3, x_1^3 x_2 - x_3^2 x_4)$ . Na základe vety 3 nájdeme polynóm  $P_2$ , pre ktorý platí  $\mathbf{J} = \text{Rad}(P_2, F_2, F_3)$ . Hľadaný polynóm je

$$P_2 = (x_1^{15} - 6x_1^{11} x_2 x_3 x_4 + 15x_1^6 x_2^4 x_3 x_4^2 + \sum_{j=3}^5 (-1)^j \binom{6}{j} (x_1 x_2 x_3)^{6-j} x_4^{2j-3} + x_4^9) =$$

$$= (x_1^{15} - 6x_1^{11} x_2 x_3 x_4 + 15x_1^6 x_2^4 x_3 x_4^2 - 20(x_1 x_2 x_3)^3 x_4^3 + 15(x_1 x_2 x_3)^2 x_4^5 - 6x_1 x_2 x_3 x_4^7 + x_4^9).$$

Veľmi jednoducho získame aj polynóm  $V_1 \equiv P_2 \pmod{(F_2, F_3)}$

$$[P_2 \mapsto V_1 = x_1^{15} - 6x_1^{11} x_2 x_3 x_4 + 15x_1^{10} x_4^3 - 20x_1^6 x_2 x_3 x_4^4 + 15x_1^5 x_4^6 - 6x_1 x_2 x_3 x_4^7 + x_4^9], \text{ pre ktorý tiež platí}$$

$$\mathbf{J} = \text{Rad}(V_1, F_2, F_3).$$

Pokusíme sa nájsť taký polynóm  $V_2 \in \mathbf{J}$ , že  $qV_2 \equiv P_2 \pmod{(F_2, F_3)}$ , pričom  $q \in \mathbf{R}$ . Potom na základe vety 1 je  $\mathbf{J} = \text{Rad}(V_2, F_2, F_3)$ . Vieme, že  $F_1^2 \equiv x_1^3 (x_1^5 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^3) \pmod{(F_2, F_3)}$ ; označme

$V_2 = x_1^5 - 2x_1x_2x_3x_4 + x_4^3$ . Rovnako ako v príklade 1 sa využitím vety 3, vlastností kongruencií a dôsledku 1 ukáže, že  $P_2 \equiv V_2^3 \pmod{(F_2, F_3)}$  a  $V_2 \in \mathbf{J}$ , pretože  $V_2 = x_1F_1 + x_4F_4$ . Aj v tomto prípade je daná krivka prienikom troch nadplôch. Tieto nadplochy môžu byť napríklad dané rovnicami  $V_2 = 0$ ,  $F_2 = 0$ ,  $F_3 = 0$ .

### Záver

V tomto článku sme uviedli novú triedu monomiálnych kriviek, o ktorých sa nám podarilo dokázať, že sú množinovým úplným prienikom, čo znamená, že sú prienikom troch nadplôch. Tieto plochy sme aj presne vyjadrili. Na konkrétnych príkladoch sme ukázali, že tieto nadplochy však nemusia byť určené jednoznačne.

### Literatúra

- [1] RENSCHUCH, B. *Elementare und praktische Idealtheorie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.
- [2] KUNZ, E.: *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*. Vieweg, Braunschweig, 1980.
- [3] ZARISKI, O. - SAMUEL, P.: *Commutative Algebra*, vol. I. D. van Nostrand Comp., Princeton–New York–Toronto–London, 1958, ruský preklad: Moskva 1963.
- [4] BRESINSKY, H.: *Monomial Gorenstein curves in  $A^4$  as set-theoretic complete intersections*. Manuscripta Math, 27, 1979, s. 353–358.
- [5] HOLEŠOVÁ, M.: *Monomiálne Gorensteinove krivky a niektoré ďalšie krivky v  $A^4$* . Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2003, no. 7, s. 5 – 11.
- [6] GASTINGER, W.: *Über die Verschwindungsideale monomialer Kurven*. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften, Landshut, 1989.
- [7] SOLČAN, Š.: *Monomiálne krivky  $C(p^2, p^2+p, p^2+p+1, (p+1)^2)$  ako množinové úplné prieniky*. Zborník vedeckých prác z medzinárodnej vedeckej konferencie Matematika vo výučbe, výskume a praxi, Nitra 2002, s. 94 – 97.

### Summary

#### MONOMIAL CURVES $C(2K - 1, 2K, 2K + 1, 3K)$

This paper presents a new class of monomial curves in 4-dimensional affine space which are set-theoretical complete intersections. We describe their associate prime ideals. We use a procedure by which we prove that these curves are intersection of three hypersurfaces and we found their concrete description. We also show a few concrete examples of this class of monomial curves.

## A NOTE ON INTEGRAL BALANCED ROOTED TREES OF DIAMETER 10

MILAN POKORNÝ

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Education, Trnava University,  
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava, Slovak Republic  
e-mail: mpokorny@truni.sk

**Abstract:** POKORNÝ, M.: A Note on Integral Balanced Rooted Trees of Diameter 10. Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2004, no. 8, pp. 13 – 15.

In [6] we described the method of finding integral balanced rooted trees of diameter 10. Using this method we discovered the first infinite class of integral balanced rooted trees of diameter 10. In this paper we describe the more efficient method of finding these classes. We used 100 million integral balanced rooted trees of diameter 4 as an initial base.

**Key Words:** integral balanced rooted trees, graph theory

**2000 Mathematics Subject Classification:** 05C50

### 1. Introduction

We say that  $G$  has an integral spectrum if all the zeros of  $P(G;x)$  are integers. A graph  $G$  is called integral if it has an integral spectrum. In general, the problem of characterising integral graphs seems to be difficult. In this paper we restrict our investigations only to integral balanced rooted trees of even diameter.

It is known that there are infinitely many integral trees. In 1998 Hic and Nedela (see [4]) published a problem if there are integral balanced trees of arbitrarily large diameter. There exist integral balanced rooted trees of diameter 2, 3, 4, 6, 8. Integral balanced rooted trees of diameter 5, 7 and 9 do not exist, as well as integral balanced trees of diameter  $4k+1$ , where  $k$  is an arbitrary integer. Only one infinite class of integral balanced rooted trees of diameter 10 has been found so far. The main concern of this paper is to summarize which integral balanced rooted trees of diameter 4 can be expanded to integral balanced rooted trees of diameter 10.

The structure of a balanced tree (without vertices of degree 2) is determined by the parity of its diameter and the sequence  $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$ , where  $k$  is the radius of  $T$  and  $n_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) denotes the number of successors of a vertex at a distance  $k-j$  from the centre  $Z(T)$ . In what follows,  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) always stands for an integer larger than 2. The balanced trees of diameter  $2k$  are encoded by the sequence  $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$  and denoted by  $T_k = T(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$ . These trees are called balanced rooted trees. Sequence  $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$  is called integral if the corresponding balanced rooted tree  $T(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$  is integral.

An integral sequence  $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$  such that the g.c.d.  $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$  is square-free will be called a primitive integral sequence and the corresponding integral tree  $T(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$  is called a primitive integral tree.

## 2. Results

In 1974 Harary and Schwenk (see [3]) proved that  $(n_l)$  is integral if and only if  $n_l$  is a square. Later, Schwenk and Watanabe (see [7]) proved that the sequence  $(n_2, n_l)$  is integral if and only if both  $n_l$  and  $n_l+n_2$  are squares.

Hic and Nedela (see [4], [5]) published the following results:

- (1) If  $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_l)$  is integral, then  $(n_j, n_{j-1}, \dots, n_l)$  is integral for  $1 \leq j \leq k-1$ .
- (2) A sequence  $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_l)$  of positive integers is integral if and only if for every  $q \in N$  the sequence  $(q^2 n_k, q^2 n_{k-1}, \dots, q^2 n_l)$  is integral.
- (3) All zeros of the characteristic polynomial of a balanced tree with the sequence  $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_l)$  are zeros of the following recursively defined polynomial  $P_k(x)$ :  

$$P_0(x) = x$$

$$P_1(x) = x^2 - n_1$$

$$P_j(x) = x.P_{j-1}(x) - n_j.P_{j-2}(x), \text{ where } j = 2, \dots, k.$$

These results enabled Hic and Pokorný (see [6]) to design a method how to expand integral balanced rooted trees of diameter  $2k-2$  to integral balanced rooted trees of diameter  $2k$ , if this is possible. 20 million integral balanced rooted trees of diameter 4 were investigated and 270 814 integral balanced rooted trees of diameter 6 were found. 96 720 of them are primitive. Using the similar method again 31 558 integral balanced rooted trees of diameter 8 were found. 5 784 of them are primitive. Finally, five integral balanced rooted trees  $T(n_5, n_4, n_3, n^2+2nk, k^2)$  of diameter 10 were found. Their list is in the table below. Only the tree in the first row below the heading of the table is primitive.

$n_5$	$n_4$	$n_3$	$n_2$	$n_1$	spectrum
3 006 756	1 051 960	751 689	283 360	133 956	{0, ±280, ±289, ±306, ±366, ±527, ±918, ±1037, ±1394, ±2074}
12 027 024	4 207 840	3 006 756	1 133 440	535 824	{0, ±560, ±578, ±612, ±732, ±1054, ±1836, ±2074, ±2788, ±4148}
27 060 804	9 467 640	6 765 201	2 550 240	1 205 604	{0, ±840, ±867, ±918, ±1098, ±1581, ±2754, ±3111, ±4182, ±6222}
48 108 096	16 831 360	12 027 024	4 533 760	2 143 296	{0, ±1120, ±1156, ±1224, ±1464, ±2108, ±3672, ±4148, ±5576, ±8296}
75 168 900	26 299 000	18 792 225	7 084 000	3 348 900	{0, ±1400, ±1445, ±1530, ±1830, ±2635, ±4590, ±5185, ±6970, ±10370}

Although the method can be used for finding integral balanced rooted trees with arbitrarily large even diameter, no integral balanced rooted tree with diameter larger than 10 has been found yet. To be able to find integral balanced rooted tree with diameter 12, it is necessary to have a large database of integral balanced rooted trees of diameter 10. Therefore we decided to explore more integral balanced rooted trees of diameter 4. The result was that all 27 integral balanced rooted trees  $T(n_5, n_4, n_3, n^2+2nk, k^2)$  of diameter 10 were found for  $k = 1..10\ 000$ ,  $n = 1..10\ 000$ . However, all of them belong to the same infinite class which was found in [6].

During the computation we found 985 539 integral balanced rooted trees of diameter 6, which belong to 330 330 different infinite classes. Moreover, we found 81 783 integral balanced rooted trees of diameter 8, which belong to 12 927 different infinite classes. Their list can be found on the web page [pdf.truni.sk/pokorny/](http://pdf.truni.sk/pokorny/).

To be able to investigate so many integral trees we made several changes to the programmes used in [6]. As the programme must operate with extremely huge numbers, we had to design our own arithmetic. We managed to make some improvements which caused that the programmes were about five times faster than the programmes with arithmetic used in [6]. Moreover, we used the fact that both  $n_3$  and  $n_5$  must be squares. Finally, we used faster computers.

The computation lasted for two weeks. We used 20 computers with Pentium 2GHz processors with operating system Windows XP. The programmes were made in Borland Delphi.

## 3. Conclusion

Although we investigated five times more integral balanced rooted trees than in [6] and we found 2.2 times more infinite classes of integral balanced rooted trees of diameter 8, we found no new infinite class of integral balanced rooted trees of diameter 10. To be able to discover an infinite class of integral balanced rooted trees of diameter 12, if it exists, it is necessary to explore much more integral balanced rooted trees of diameter 4. Unfortunately, we are not able to do it using the method described in this paper.

### References

- [1] CVETKOVIČ, D.M. –DOOB, M. – SACHS, H.: *Spectra of graphs – Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften – Academic Press, Berlin – New York, 1980; 2<sup>nd</sup> Edition, 1982; 3<sup>rd</sup> Edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995.
- [2] HARARY, F.: *Graph Theory*, Addison – Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1969.
- [3] HARARY, F. - Schwenk, A. J.: *Which graphs have integral spectra?* In: *Graphs and Combinatorics*. Lecture Notes in Math. 406, Springer-Verlag, Berlin, 1974, pp. 45-51.
- [4] HÍC, P. - NEDELA, R.: *Balanced integral trees*. *Math. Slovaca*, **48** (1998), No. 5, pp. 429 - 445.
- [5] HÍC, P. - NEDELA, R.: *Note on zeros of the characteristic polynomial of balanced trees*, *Acta Univ. M. Bellii, Math. no. 3* (1996), pp. 31 - 35.
- [6] HÍC, P. – POKORNÝ, M.: *On integral balanced rooted trees of diameter 10*. *Acta Univ. Mathaei Bellii, Series Mathematics*, 2003, No. 10, pp. 9 - 15.
- [7] SCHWENK, A. J. - WATANABE, M.: *Integral starlike trees*, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **28** (1979), pp. 120 -128.

## O EXISTENCII MONOTÓNNYCH RIEŠENÍ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t - h) = 0.$$

MARCEL ABAS<sup>1</sup> FRANTIŠEK ŠIŠOLÁK

Katedra matematiky, Materiálovotechnologická fakulta, Slovenská Technická Univerzita,  
Paulínska 16, 917 24 Trnava  
e-mail: abas@mtf.stuba.sk

**Abstract:** ABAS, M., ŠIŠOLÁK F.: On Existence of Monotonous Solutions of Differential Equation  $x''(t) + ax'(t) + bx(t - h) = 0$ . Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2004, no. 8, pp. 16 – 19.

In this paper we deal with sufficient conditions on existence of monotonous solutions of differential equation with delay. The solution is reduced to investigation of sufficient conditions on existence of real roots of the equation  $r^2 + ar + be^{-rh} = 0$ .

**Key words:** differential equation with delay

### 1. Úvod

V prácach [2, 3] sú uvedené postačujúce podmienky existencie monotónnych riešení diferenciálnej rovnice 1-vého resp.  $n$  – tého rádu s oneskoreným argumentom.

V tomto článku sa budeme zaoberať existenciou monotónnych riešení diferenciálnej rovnice 2. rádu s oneskoreným argumentom

$$(1) \quad x''(t) + ax'(t) + bx(t - h) = 0$$

na intervale  $(-\infty, \infty)$ , kde  $a, b, h$  sú reálne konštanty.

**Lema 1:** Diferenciálna rovnica (1) má riešenie  $x(t) = e^{rt}$  na intervale  $(-\infty, \infty)$  práve vtedy, ak číslo  $r$  je koreňom rovnice

$$(2) \quad r^2 + ar + be^{-rh} = 0.$$

**Poznámka:** Ak rovnica (2) má kladný koreň  $r$ , tak riešenie  $x(t) = e^{rt}$  je rastúca funkcia na intervale  $(-\infty, \infty)$  a  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ . Ak rovnica (2) má záporný koreň  $r$ , tak riešenie  $x(t) = e^{rt}$  je klesajúca funkcia na intervale  $(-\infty, \infty)$  a  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

---

<sup>1</sup> VEGA 1/9176/02, KEGA 35/2001, VEGA 1/1007/04

**Definícia 1:** Budeme hovoriť, že riešenie  $x(t)$  diferenciálnej rovnice (1)

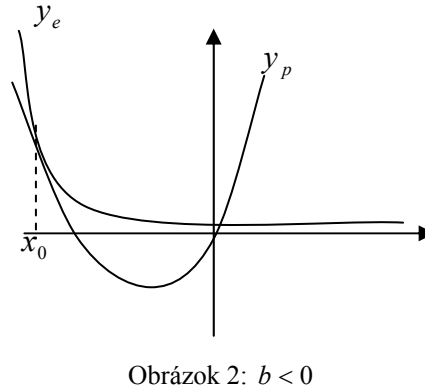
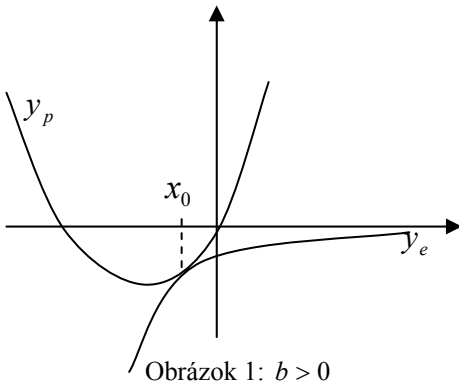
- a) má vlastnosť **A**, ak je definované na intervale  $(-\infty, \infty)$  a  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ,
- b) má vlastnosť **B**, ak je definované na intervale  $(-\infty, \infty)$  a  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ .

**Veta 1:** Ak  $a > 0, b > 0, h > 0$ , tak diferenciálna rovnica (1):

- a) má riešenie s vlastnosťou **A** pre  $b = B_+$
- b) má dve lineárne nezávislé riešenia s vlastnosťou **A** pre  $b < B_+$
- c) nemá monotónne riešenie na intervale  $(-\infty, \infty)$  pre  $B_+ < b$ ,

$$\text{kde } B_+ = \frac{1}{h^2} e^{\frac{\sqrt{a^2 h^2 + 4} - (ah+2)}{2}} \left[ \sqrt{a^2 h^2 + 4} - 2 \right].$$

**Dôkaz:** Pri dôkaze tejto vety sa zameriame na riešenie rovnice  $r^2 + ar + be^{-rh} = 0$ . Riešenie tejto rovnice budeme hľadať zo vzájomnej polohy kriviek  $y_p = x^2 + ax$  a  $y_e = -be^{-hx}$ . Grafy funkcií  $y_p$  a  $y_e$  sú na obrázkoch 1 a 2.



Je zrejmé, že na to, aby sme vedeli určiť počet riešení rovnice (2), stačí poznať vzájomnú polohu paraboly  $p$  a exponenciály  $e$ , ako ich vidíme na obrázkoch 1 a 2. Presnejšie, ak sa nám podarí určiť pre aké číslo  $b$  (v závislosti na  $a$  a  $h$ ) majú priamka a parabola dotykový bod, budeme vedieť určiť aj (v závislosti na  $b$ ) koľko má daná sústava riešení.

Najskôr nájdeme bod dotyku oboch kriviek  $x_0$ . Pretože krivky musia mať v bode  $x_0$  rovnaké funkčné

hodnoty, musí platiť  $x_0^2 + ax_0 = -be^{-hx_0}$  z čoho vyplýva, že  $a = -\frac{1}{x_0} be^{-hx_0} - x_0$ . Na základe toho,

že aj prvé derivácie funkcií  $y_p$  a  $y_e$  musia byť v bode  $x_0$  rovnaké, dostávame  $b = \frac{x_0^2 e^{hx_0}}{hx_0 + 1}$  a

$$a = -\frac{hx_0 + 2}{hx_0 + 1} x_0. \text{ Pritom pre } b > 0 \text{ je } x_0 \text{ z intervalu } \left(-\frac{1}{h}, 0\right) \text{ a pre } b < 0 \text{ platí, že } x_0 \in \left(-\infty, -\frac{2}{h}\right).$$

Aby sme mohli vyjadriť bod dotyku v premenných  $a$  a  $h$ , musíme si vyjadriť  $x_0$  z rovnice pre  $a$ .

Funkcia  $a(x_0) = -\frac{hx_0 + 2}{hx_0 + 1} x_0$  je rýdzomonotónna na intervaloch  $\left(-\infty, -\frac{1}{h}\right)$  a  $\left(-\frac{1}{h}, \infty\right)$ . Preto existuje inverzná funkcia:

$$\text{I) } x_0 = \frac{-(ah + 2) + \sqrt{a^2 h^2 + 4}}{2h}, \text{ pričom } x_0 \in \left(-\frac{1}{h}, 0\right) \text{ a } b > 0$$

$$\text{II) } x_0 = \frac{-(ah + 2) - \sqrt{a^2 h^2 + 4}}{2h}, \text{ pričom } x_0 \in \left(-\infty, -\frac{2}{h}\right) \text{ a } b < 0.$$

Ak výrazy z I) a II) dosadíme namiesto  $x_0$  do rovnice  $b = \frac{x_0^2 e^{hx_0}}{hx_0 + 1}$ , dostávame postupne

$$\text{i) } B_+ = \frac{1}{h^2} e^{\frac{\sqrt{a^2 h^2 + 4} - (ah + 2)}{2}} \left[ \sqrt{a^2 h^2 + 4} - 2 \right] \text{ pre } x_0 \in \left(-\frac{2}{h}, 0\right)$$

$$\text{ii) } B_- = -\frac{1}{h^2} e^{\frac{-\sqrt{a^2 h^2 + 4} - (ah + 2)}{2}} \left[ \sqrt{a^2 h^2 + 4} + 2 \right] \text{ pre } x_0 \in \left(-\infty, -\frac{2}{h}\right).$$

Pritom nie je ťažké overiť, že  $B_+ > 0$  a  $B_- < 0$  pre každé reálne  $a, h$ .  $\square$

**Veta 2:** Ak  $a > 0, b < 0, h > 0$ , tak diferenciálna rovnica (1)

a) má dve lineárne nezávislé riešenia, jedno s vlastnosťou **A** a jedno riešenie s vlastnosťou **B** pre  $B_- < b$

b) má riešenia s vlastnosťou **A** a riešenie s vlastnosťou **B** pre  $b = B_-$

c) má riešenie s vlastnosťou **B** pre  $b < B_-$ ,

$$\text{kde } B_- = -\frac{1}{h^2} e^{\frac{-\sqrt{a^2 h^2 + 4} - (ah + 2)}{2}} \left[ \sqrt{a^2 h^2 + 4} + 2 \right].$$

**Dôkaz:** Pozri dôkaz vety 1.  $\square$



**Veta 3:** Ak  $a > 0, b > 0, h > 0$ , tak diferenciálna rovnica (1)

a) má dve lineárne nezávislé riešenia s vlastnosťou **A** pre  $\frac{4be^{-\frac{ah}{2}}}{a^2} \leq 1$

b) nemá monotónne riešenie na intervale  $(-\infty, \infty)$  pre  $\frac{4b}{a^2} \geq 1$ .

**Dôkaz:** Dôkaz prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie.  $\square$

#### 4. Výsledky a záver

V tomto krátkom príspevku sme sa zaoberali riešením diferenciálnej rovnice (1) s oneskoreným argumentom. Vo vetách 1, 2 a 3 sú uvedené postačujúce podmienky existencie monotónneho riešenia tejto diferenciálnej rovnice.

#### Literatúra

- [1] BELLMAN, R., - COOKE, K, L.: *Differential – difference equations*, New York, 1963
- [2] ŠIŠOLÁK, F.: *O existencii monotónnych riešení diferenciálnej rovnice  $x'(t) + bx(t) + ax(t-h) = 0$* , Zborník vedeckých prác Strojnickej fakulty SVŠT v Bratislave, 1976
- [3] ŠIŠOLÁK, F.: *O existencii monotónnych riešení diferenciálnej rovnice  $x^{(n)}(t) + ax(t-h) = 0$* , Zborník vedeckých prác Strojnickej fakulty SVŠT v Bratislave, 1977

#### Summary

##### ON EXISTENCE OF MONOTONOUS SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATION

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t-h) = 0.$$

In this article we dealt with solving of differential equation (1) with delay. There are sufficient conditions on existence of monotonous solution of this differential equation in Theorems 1, 2 and 3. These conditions are presented in terms of variables  $a, b$  and the delay  $h$ .

## VIAZANÉ EXTRÉMY (2. Časť)

ZOLTÁN ZALABAI, MILAN POKORNÝ

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity,  
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava  
e-mail: zzalabai@truni.sk, mpokorny@truni.sk

**Abstract:** ZALABAI, Z. – POKORNÝ, M.: Constrained Extrema. Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2004, no. 8, pp. 20 – 25.

In [5] the authors described the method of finding constrained extrema in points of the curve in two-dimensional or three-dimensional space. This paper deals with constrained extrema for the function  $f(x, y, z)$  with the constraint  $g(x, y, z) = 0$  and for the function  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  with the constraint  $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . This paper does not provide theoretical results, but it shows how it is possible to solve these problems using personal computers and short programmes written in the language GW-BASIC.

**Key Words:** GW – BASIC, programme, extremum, constrained extrema, gradient of function

### Úvod

V článku [5] sme hľadali viazané extrémny funkcie v bodoch roviny, resp. priestorovej krivky. V práci budeme pokračovať. Budeme hľadať viazané extrémny funkcie  $f(x, y, z)$  v bodoch určitej plochy  $g(x, y, z) = 0$ , resp. viazané extrémny funkcie  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  s väzbou  $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Ukážeme, ako sa dajú riešiť niektoré úlohy s využitím výpočtovej techniky. Použijeme krátke programy v jazyku GW – BASIC, v ktorých využijeme vlastnosti gradientu funkcie. Uvedieme základný program a pomocou neho vyriešime niekoľko úloh.

### I. Viazané extrémny funkcie $F(x, y, z)$ s väzbou $g(x, y, z) = 0$

Napišeme program, ktorý uvádzame v tabuľke č.1. Uvedený program slúži na hľadanie lokálnych extrémov funkcie  $f(x, y)$ . S viazanými extrémami funkcie  $F(x, y, z)$  s väzbou  $g(x, y, z) = 0$  to súvisí takto. Ak z rovnice  $g(x, y, z) = 0$  je možné vyjadriť „z“ pomocou  $x$  a  $y$ , tak toto „z“ dosadíme do  $F(x, y, z)$  namiesto  $z$ , čím dostaneme funkciu dvoch premenných  $f(x, y)$ . Nájďme také  $x_0, y_0$ , v ktorých má funkcia  $f(x, y)$  lokálny extrém (maximum alebo minimum) a vypočítame  $z_0$  pomocou  $x_0$  a  $y_0$ .  $[x_0, y_0, z_0]$  je hľadaný bod plochy  $g(x, y, z) = 0$ , v ktorom má funkcia  $F(x, y, z)$  lokálny extrém. Napríklad v prípade guľovej plochy (resp. elipsoidu) postupujeme takto: ak poznáme parametrické rovnice:  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , potom tieto výrazy dosadíme do  $F(x, y, z)$  a dostaneme funkciu dvoch premenných  $f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = f(u, v)$ . Teraz už hľadáme extrémny tejto funkcie. Záverom vypočítame  $x_0, y_0, z_0$  pomocou  $u_0$  a  $v_0$ . Z tabuľky hodnôt, ktoré vytlačí počítač, je možné vidieť hodnoty  $x_0, y_0$ , resp.  $u_0, v_0$  a hodnotu extrémny funkcie  $F(x, y, z)$ .

```

25 DIM X(1000):DIM Y(1000)
26 DIM P1(1000):DIM P2(1000)
27 DIM G1(1000):DIM G2(1000)
30 DEF FN F(X,Y)=X*Y^2*((12-X-2*Y)/3)^3
540 INPUT " x(1),y(1)";X(1),Y(1)
550 P1(1)=(FN F(X(1)+.01,Y(1))-FN F(X(1),Y(1)))/.01
560 P2(1)=(FN F(X(1),Y(1)+.01)-FN F(X(1),Y(1)))/.01
570 G1(1)=(P1(1))/SQR(P1(1)^2+P2(1)^2)
580 G2(1)=(P2(1))/SQR(P1(1)^2+P2(1)^2)
585 INPUT "k1 ***0.01 pre max.,-0.01 pre min.";K1
590 N=500
600 FOR K=2 TO N
610 X(K)=X(K-1)+K1*G1(K-1)
620 Y(K)=Y(K-1)+K1*G2(K-1)
630 P1(K)=(FN F(X(K)+.01,Y(K))-FN F(X(K),Y(K)))/.01
640 P2(K)=(FN F(X(K),Y(K)+.01)-FN F(X(K),Y(K)))/.01
650 G1(K)=P1(K)/SQR(P1(K)^2+P2(K)^2)
660 G2(K)=P2(K)/SQR(P1(K)^2+P2(K)^2)
670 PRINT "f(";X(K);",";Y(K);")=";FN F(X(K),Y(K))
680 NEXT K

```

Tabuľka č.1

### Príklad 1.

Nájdite lokálny extrém funkcie  $F(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^3$  s väzbou  $x + 2y + 3z = a$  ( $x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$ ).

([1], s. 319, úloha 3662, výsledok  $u_{\max} = \left(\frac{a}{6}\right)^6$  pri  $x = y = z = \frac{a}{6}$ .)

*Poznámky* k riešeniu pomocou programu, ktorý je uvedený v tabuľke č.1.

Pre  $a = 12$ :  $x + 2y + 3z = 12$ . Z toho  $z = (12 - x - 2y) / 3$ . Po dosadení za  $z$  do „ $x \cdot y^2 \cdot z^3$ “ dostaneme funkciu

$$F(x, y) = x \cdot y^2 \cdot ((12 - x - 2y) / 3)^3.$$

Voľba  $x(1), y(1)$  – napr. 1,1. Časť tabuľky prikladáme ako obrázok č.1.

### Príklad 2.

Nájdite lokálny extrém funkcie  $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$  s väzbou  $x + y + z = \pi / 2$  ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ).

([2], s. 351, príklad 272, výsledok: v bode  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$  je lokálne maximum  $\frac{1}{8}$ ).

*Poznámky* k riešeniu:  $F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right)$ . Hodnoty  $x_0, y_0$  a hodnotu maxima vidíme

na vytlačenej tabuľke na obrazovke,  $z_0 = \frac{\pi}{2} - x_0 - y_0$ .

$f(1.996286, 1.992479) = 63.99804$   
 $f(1.999195, 2.002046) = 63.99991$   
 $f(1.996294, 1.992476) = 63.99803$   
 $f(1.999324, 2.002006) = 63.99989$   
 $f(1.996357, 1.992456) = 63.99805$   
 $f(1.999157, 2.002056) = 63.9999$   
 $f(1.996243, 1.99249) = 63.99803$   
 $f(1.999293, 2.002013) = 63.9999$   
 $f(1.99635, 1.992456) = 63.99805$   
 $f(1.999195, 2.002043) = 63.99988$   
 $f(1.996315, 1.992467) = 63.99805$   
 $f(1.999107, 2.002069) = 63.99991$   
 $f(1.996211, 1.992498) = 63.99806$   
 $f(1.99919, 2.002044) = 63.99992$   
 $f(1.996255, 1.992484) = 63.99805$   
 $f(1.999147, 2.002057) = 63.99989$   
 $f(1.996261, 1.992482) = 63.99804$   
 $f(1.999197, 2.002041) = 63.99991$   
 $f(1.996305, 1.992469) = 63.99804$   
 $f(1.999197, 2.002041) = 63.99991$   
 $f(1.996305, 1.992469) = 63.99804$

Obrázok č.1

### Príklad 3.

Nájdite lokálne extrémny funkcie  $u = x \cdot y \cdot z$  s väzbou  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .

([2], s. 348, príklad 266, výsledok: v bodoch  $[1,1,1]$ ,  $[1,-1,-1]$ ,  $[-1,1,-1]$ ,  $[-1,-1,1]$  funkcia má lokálne maximum  $u_{\max} = 1$ . V bodoch  $[-1,-1,-1]$ ,  $[-1,1,1]$ ,  $[1,-1,1]$ ,  $[1,1,-1]$  je lokálne minimum  $u_{\min} = -1$ ).

*Poznámky* k riešeniu: do  $u = x \cdot y \cdot z$  dosadíme

$$x = \sqrt{3} \cdot \cos u \sin v, y = \sqrt{3} \sin u \sin v, z = \sqrt{3} \cos v.$$

Dostaneme funkciu dvoch premenných.

Napr. pri voľbe  $x(1) = 1, y(1) = 1$  dostaneme lokálne maximum v bode  $[1,1,1]$ ,  $u_{\max} = 1$ , pri  $x(1) = 3, y(1) = 1$  dostaneme lokálne maximum v bode  $[-1,-1,1]$ ,  $u_{\max} = 1$ .

## II. Viazané extrémny funkcie $F(x, y, z, w)$ s väzbou $g(x, y, z, w) = 0$

Príslušný program je uvedený v tabuľke č.2. Program slúži na určenie lokálnych extrémov funkcie troch premenných  $f(x, y, z)$ . Ak máme určiť lokálny extrém funkcie  $F(x, y, z, w)$  s väzbou  $g(x, y, z, w) = 0$ , postupujeme takto: z rovnice  $g(x, y, z, w) = 0$  vyjadríme  $w$  (pokiaľ je to možné!) pomocou  $x, y, z$ . Takto vypočítané  $w$  dosadíme do  $F(x, y, z, w)$  namiesto  $w$ . Dostaneme funkciu troch premenných  $f(x, y, z)$ . Ak nájdeme bod  $[x_0, y_0, z_0]$ , v ktorom má táto funkcia lokálny extrém (maximum alebo minimum), potom vyjadríme  $w_0$  pomocou  $x_0, y_0, z_0$ . Bod  $[x_0, y_0, z_0, w_0]$  je hľadaný bod, v ktorom má funkcia  $F$  extrém s väzbou  $g(x, y, z, w) = 0$ . Zrejme  $g(x_0, y_0, z_0, w_0) = 0$ . Čísla  $x_0, y_0, z_0$  a hodnotu lokálneho extrém vytláči počítač – je to posledný riadok na obrazovke.

Väčšina autorov rieši túto problematiku pomocou Lagrangeovej metódy. Ide o veľmi zložité a komplikované výpočty. Pokiaľ ide o funkcie troch a štyroch premenných, učebnice i zbierky úloh obsahujú malý počet takýchto príkladov. V mnohých prípadoch pomôže počítač.

```

53 DEF FN F(X,Y,Z)=X^2+Y^2+Z^2+(1-X-Y-Z)^2
95 DIM X(150):DIM Y(150):DIM Z(150)
96 DIM P1(150):DIM P2(150):DIM P3(150)
97 DIM G1(150):DIM G2(150):DIM G3(150)
100 INPUT "zadaj x(1),y(1),z(1)":X(1),Y(1),Z(1)
110 P1(1)=(FN F(X(1)+.01,Y(1),Z(1))-FN F(X(1),Y(1),Z(1)))/.01
115 P2(1)=(FN F(X(1),Y(1)+.01,Z(1))-FN F(X(1),Y(1),Z(1)))/.01
120 P3(1)=(FN F(X(1),Y(1),Z(1)+.01)-FN F(X(1),Y(1),Z(1)))/.01
125 G1(1)=P1(1)/SQR(P1(1)^2+P2(1)^2+P3(1)^2)
130 G2(1)=P2(1)/SQR(P1(1)^2+P2(1)^2+P3(1)^2)
135 G3(1)=P3(1)/SQR(P1(1)^2+P2(1)^2+P3(1)^2)
140 N=140
145 INPUT "t **** 0.1 pre max.,-0.1 pre min.":T
150 FOR K=2 TO N
160 X(K)=X(K-1)+T*G1(K-1)
170 Y(K)=Y(K-1)+T*G2(K-1)
180 Z(K)=Z(K-1)+T*G3(K-1)
190 P1(K)=(FN F(X(K)+.01,Y(K),Z(K))-FN F(X(K),Y(K),Z(K)))/.01
200 P2(K)=(FN F(X(K),Y(K)+.01,Z(K))-FN F(X(K),Y(K),Z(K)))/.01
210 P3(K)=(FN F(X(K),Y(K),Z(K)+.01)-FN F(X(K),Y(K),Z(K)))/.01
220 G1(K)=P1(K)/SQR(P1(K)^2+P2(K)^2+P3(K)^2)
230 G2(K)=P2(K)/SQR(P1(K)^2+P2(K)^2+P3(K)^2)
240 G3(K)=P3(K)/SQR(P1(K)^2+P2(K)^2+P3(K)^2)
250 PRINT "f(";X(K);",",Y(K);",",Z(K);")=";FN F(X(K),Y(K),Z(K))
260 NEXT K

```

Tabuľka č.2

Príklad 4.

Nájdite lokálny extrém funkcie  $u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$  s väzbou  $x + y + z + w = 1$ .

([1], s. 318, úloha 3667. Výsledok  $u_{\min} = 1/4$  pri  $x = y = z = w = 1/4$ ).

Časť vytlačenej tabuľky obsahuje obrázok č.2.

Príklad 5.

Nájdite lokálny extrém funkcie  $u = \sin x + \sin y + \sin z + \sin w$  s väzbou

$x + y + z + w = 0$ .

Napr. v bode  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right]$  je lokálne maximum;  $u_{\max} = 4$ .

Obrázok č. 3 predstavuje časť vytlačenej tabuľky.

```

f( .3014025 , .3014025 , .3014025 )= .2817066
f( .2956289 , .2956289 , .295629 )= .274984
f( .2898554 , .2898554 , .2898555 )= .2690615
f( .2840819 , .2840819 , .284082 )= .2639389
f( .2783084 , .2783084 , .2783085 )= .2596164
f( .2725349 , .2725349 , .2725349 )= .2560939
f( .2667613 , .2667613 , .2667615 )= .2533713
f( .2609879 , .2609879 , .2609879 )= .2514488
f( .2552144 , .2552144 , .2552144 )= .2503263
f( .2494409 , .2494409 , .2494409 )= .2500038
f( .2436674 , .2436674 , .2436674 )= .2504812
f( .2494407 , .2494407 , .2494413 )= .2500038
f( .2436676 , .2436676 , .243667 )= .2504813
f( .2494409 , .2494409 , .2494409 )= .2500038
f( .2436677 , .2436677 , .2436666 )= .2504812
f( .2494411 , .2494411 , .2494405 )= .2500038
f( .2436668 , .2436679 , .2436674 )= .2504813
f( .2494407 , .2494412 , .2494407 )= .2500038
f( .2436672 , .2436677 , .2436672 )= .2504812

```

Obrázok č.2

$f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$   
 $f(1.572758, 1.572758, 1.572757) = 3.999977$   
 $f(1.566985, 1.566985, 1.566984) = 3.999913$

Obrázok č.3

### Záver

Metóda opísaná v článku môže pomôcť pri hľadaní viazaných lokálnych extrémov funkcií viac premenných hlavne v prípade, keď použitie Lagrangeovej metódy vedie k pomerne komplikovaným výpočtom. Navyše možno túto metódu efektívne využiť pri kontrole výsledkov riešenia, napríklad v matematických zbierkach úloh.

### Literatúra

- [1] DEMIDOVICH, B. P.: *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu*, Izdatel'stvo „Nauka“, Moskva 1969.
- [2] LAŠKO, I. I. – BOJARČUK, A. K. – GAJ, Ja. G. – GOLOVAČ, G. P.: *Spravočnoje posobije po matematičeskomu analizu II*, Višša škola, Kijev 1979.
- [3] KLUVÁNEK, I. – MIŠÍK, L. – ŠVEC, M.: *Matematika I*. Bratislava: SVTL, 1966.
- [4] JIRÁSEK, F. – KRIEGLSTEIN, E. – Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I, II, III*; SNTL Praha 1979.
- [5] ZALABAI, Z.: *Viazané extrémny*, ACTA Facultatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis, Séria C - Matematika, Fyzika, Informatika; Trnava 2003.

## Summary

### CONSTRAINED EXTREMA

This paper deals with the method of finding constrained extrema for the function  $f(x, y, z)$  with the constraint  $g(x, y, z) = 0$  and for the function  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  with the constraint  $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . The method can especially be useful when the Lagrange method leads to the complicated calculations. Moreover, the method can be used to check results of problems which are published in different mathematical books.

## CABRI GEOMETRIA - POMÔCKA PRI VYUČOVANÍ MATEMATIKY

KRISTÍNA SOTÁKOVÁ

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity,  
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 TRNAVA  
e-mail: ksotakov@truni.sk

**Abstract:** SOTÁKOVÁ, K.: Cabri Geometry II - an Instrument of Teaching of Mathematics. Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2004, no. 8, pp. 26 – 30.

The use of computers in teaching mathematics has become important nowadays. In the proposed paper we describe two experiments that we have realized with students at the basic school. The first experiment has concerned with teaching transforms of symmetry and the second one the angles, both using the graphical software Cabri Geometry II. We have compared the knowledge of two groups of students whereby one of them was taught using the Cabri Geometry II and the second one in a common way. The advantages and disadvantages of both assets are presented as a conclusion of the paper.

An implementation of ICT into teaching necessarily implies changes of curricula. These methods are not always effective, especially in short-term activities.

**Key words:** teaching of mathematics, Cabri Geometry II, transforms of symmetry, angle.

### Úvod

Hlavným zmyslom zaradenia informačných a komunikačných technológií do základného vzdelávania okrem dosiahnutia samotnej počítačovej gramotnosti je aj ich efektívne využitie pri vyučovaní jednotlivých predmetov.

Tento príspevok sa zaoberá vyhodnotením experimentálnej výučby matematiky realizovanej s podporou didaktického softvéru Cabri Geometry II. Experiment bol realizovaný v priebehu mája 2004 na základnej škole v Bratislave. Témy experimentu sa týkali výkladu učiva Osová súmernosť (7.ročník) a Súhlasné a striedavé uhly (6.ročník). Cieľom experimentu bolo skúmanie efektívnosti tohto spôsobu výučby vzhľadom k osvojeniu si nového učiva.

Príspevok je rozdelený na tri časti. Prvá kapitola je venovaná experimentálnej výučbe osovej súmernosti v 6. ročníku. Druhá kapitola opisuje experiment s praktickou výučbou súhlasných a striedavých uhlov klasickým spôsobom a tiež pomocou počítača. V závere zhrňame získané poznatky a načrtávame nové podnety pre ďalší výskum.

Základná škola, na ktorej boli experimenty realizované, patrí svojou kapacitou medzi malé školy, keďže počet žiakov v každej triede je približne 20. Škola je zapojená do projektu Infovek a disponuje počítačovou učebňou s desiatimi počítačmi. Avšak, ako sme zistili, učiteľom chýbajú skúsenosti s využitím počítačov vo vyučovaní. Žiaci tejto školy, doposiaľ nepracovali s počítačom na hodine matematiky. Práca s didaktickým softvérom Cabri Geometry II na experimentálnej vyučovacej hodine bola ich prvým kontaktom s počítačmi na hodine matematiky. Časová dotácia na každý experiment bola dve vyučovacie hodiny. Priebeh experimentov bol nasledovný:

1. Uvedenie žiakov do používania nástrojov Cabri Geometry II (len tých, ktoré budú počas vyučovania využívať) (cca 10 min)
2. Motivácia k novému učivu (cca 5 min)
3. Pokyny k vypracovaniu pracovných listov (5 min)



4. Samostatná práca žiakov za asistencie učiteľa (20 min)
5. Spoločné vyhodnotenie hodiny (5 min)

### Experiment č. 1 - osová súmernosť

V klasickom usporiadaní učiva *Osová súmernosť* dominuje zobrazenie bodu v osovej súmernosti. Až potom nasleduje obraz úsečky, trojuholníka a pod. Na základe poznatkov o pojmotvornom procese [2] je vhodné objasniť nový pojem najskôr na úrovni separovaných modelov, čo Cabri Geometry II umožňuje. Preto pracovné listy určené na experiment začínajú zobrazením trojuholníka v osovej súmernosti (ako separovaného modelu) a až potom nasledujú obrazy bodu, úsečky a pod. Dôvodom tohoto netradičného usporiadania učiva je skutočnosť, že manipulácia s trojuholníkom a následná vizualizácia zhodného zobrazenia trojuholníka je v dynamickej geometrii, ktorú Cabri Geometry II predstavuje, vhodnejšia pri rovinnom útve ako pri samotnom bode.

Na začiatku hodiny sme žiakom vysvetlili základy práce s grafickým softvérom Cabri Geometry II, pričom sme sa zamerali na ponuku nástrojov súvisiacu s učivom *Osová súmernosť* (trojuholník, priamka, bod, pomenovanie, úsečka, dĺžka úsečky, osová súmernosť). Následne som žiakom rozdala pracovné listy, ktoré okrem znenia problémových úloh obsahovali aj príslušné názvy nástrojov v Cabri Geometry II (Obr.1). Žiaci vypracovávali úlohy za pomoci nástrojov Cabri Geometry II a zároveň vyplňali pracovné listy (Obr.1). V samostatnej práci pokračovali aj nasledujúcu hodinu matematiky.

Sledujte pokyny :	Použite ikonu:
Otvorte si nový súbor.	Súbory – nový
Vyznačte trojuholník.	Trojuholník
Vyznačte ľubovoľnú priamku.	Priamka
Vyberte z ponuky nástrojov “osová súmernosť”. Posuňte kurzor na trojuholník tak, aby sa pri ňom objavil text “zobraz v súmernosti tento trojuholník” a potvrdte to kliknutím. Posuňte kurzor k priamke tak, aby sa objavil nápis “vzhľadom na táto priamka” a kliknite. Nakreslí sa obraz trojuholníka v osovej súmernosti.	Osová súmernosť
Zafarbite trojuholník – vzor na červeno.	Vyplň farbou
Zafarbite trojuholník – obraz na zeleno.	Vyplň farbou
Otvorte si nový súbor.	Súbory – nový
Vyznačte priamku $k$ .	Priamka
Vyznačte priamku $l$ rovnobežnú s priamkou $k$ .	Rovnoběžka
Vyznačte os súmernosti $a$ .	priamka
Vytvorte obraz priamky $k$ v osovej súmernosti s osou $a$ vzniknutý obraz priamky $k$ označte $k'$ .	Osová súmernosť
Vytvorte obraz priamky $l$ v osovej súmernosti s osou $a$ vzniknutý obraz priamky $l$ označte $l'$ .	Osová súmernosť
Vyznačte priamku $k$ a posúvajte ju.	
Vyšetrte vzájomnú polohu priamok $k'$ a $l'$ .	
Čo možno o nich povedať?	Ukazovateľ
.....	Rovnoběžný?
.....	

Obr. 1 Ukážka pracovného listu

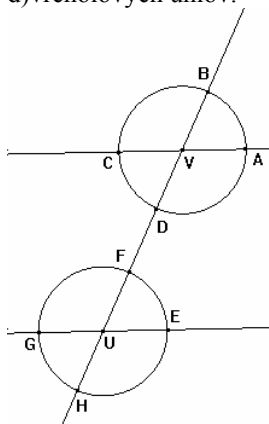
Na záver experimentu sme preverili vedomosti a zručnosti žiakov z učiva Osová súmernosť formou riešenia konštrukčných úloh pri tabuli a do zošita. Didaktické závery z experimentu môžeme stručne zhrnúť takto:

- žiaci pochopili pojem osovej súmernosti ako zhodného zobrazenia, ktoré každému vzoru priradí vlastný obraz.
- veľmi rýchlo vedeli odhadnúť a narysovať špeciálne prípady osovej súmernosti, ktorými sú napr. obraz trojuholníka v osovej súmernosti podľa osi, ktorá prechádza stranou alebo ktorá prechádza vrcholom trojuholníka. Pri klasickej forme výučby sa tieto špeciálne prípady javia ako problematické.
- problémy nastali pri verbalizovaní nového poznatku – žiaci nevedeli pomenovať vzor, obraz, samodružný bod a pod.

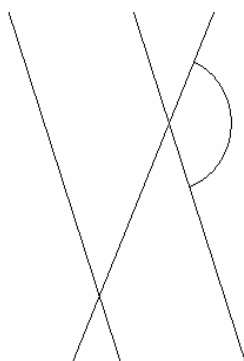
### Experiment č. 2 - súhlasné a striedavé uhly

Cieľom druhého experimentu bolo kvantitatívne vyhodnotiť úroveň osvojenia si nových pojmov daného učiva v kontexte využitia didaktického softveru. V rámci tohto experimentu sme žiakov rozdelili na dve, výkonovo rovnocenné, skupiny. Experimentálna skupina žiakov absolvovala výklad nového učiva s využitím Cabri Geometry II a kontrolná skupina sa zúčastnila klasickej výučby. Vyučovacie jednotky oboch skupín prebiehali súčasne, pričom klasickej vyučovaciu hodinu viedla učiteľka matematiky. Téma vyučovacej hodiny bola Súhlasné a striedavé uhly. Žiaci nepoznali použitý didaktický softvér a na hodinách matematiky s využitím počítača sa dosiaľ nezúčastňovali.

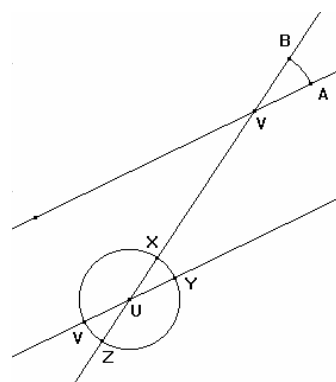
1. Na obrázku č.1 sú vyznačené uhly. Vypíšte všetky dvojice a) súhlasných, b) striedavých, c) susedných, d) vrcholových uhlov. 8 bodov



Obr.1



Obr.2



Obr.3

2. Na obrázku č.2 je vyznačený uhol. Vyznačte všetky ostatné uhly, ktoré majú rovnakú veľkosť ako vyznačený uhol. 3 body

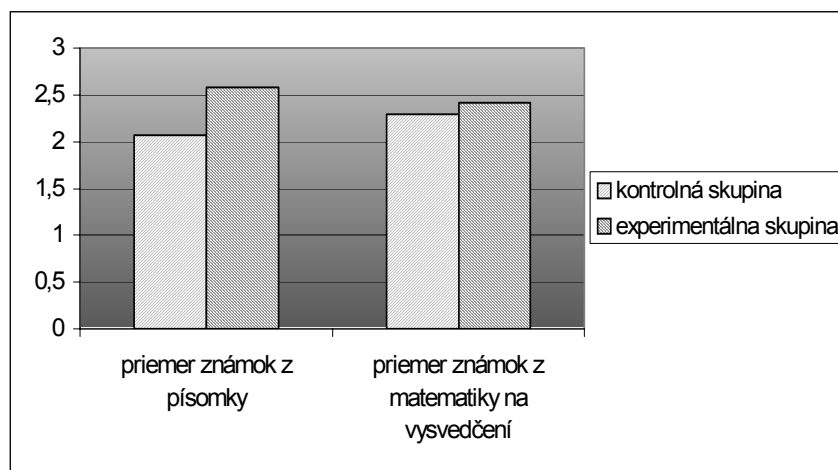
3. Na obrázku č.3 je vyznačený uhol AVB, pričom  $|\angle AVB| = 30^\circ$ . Vypočítajte veľkosti ostatných uhlov vyznačených na obrázku.

4 body

Obr. 2 Písomka z učiva o striedavých a súhlasných uhloch

Vyučovacia hodina sa začala zopakovaním pojmov susedný a vrcholový uhol. Novými pojmami boli súhlasný a striedavý uhol. Obsahom vyučovacej hodiny experimentálnej skupiny a kontrolnej skupiny bola konštrukcia rovnobežiek pretáťch priečkou a klasifikácia dvojíc zhodných uhlov. Na základe manipulácie s obrázkom a následného merania si žiaci experimentálnej skupiny overovali poznatok o tom, že každé dva vrcholové majú rovnakú veľkosť. Objavili taktiež iné dvojice zhodných uhlov na obrázku dvoch rovnobežiek pretáťch priečkou. Tie boli nazvané súhlasnými alebo striedavými uhly podľa toho, či ležali v tej istej polrovine určenej priečkou, alebo ležali v opačných polrovinách. Na ďalšej hodine obidve skupiny žiakov (experimentálna aj kontrolná) písali krátku písomku z prebratého učiva. Znenie písomky je na obr. 2.

Graf na obr. 3 prezentuje porovnanie výsledkov hodnotenia testov v kontrolnej a experimentálnej skupine.



Obr.3 Porovnanie výsledkov písomky v kontrolnej a experimentálnej skupine

Sledované skupiny dosiahli v meraných vedomostiach značné rozdiely. Ukázalo sa, že žiaci kontrolnej skupiny napísali písomku lepšie ako žiaci experimentálnej skupiny. Dôvodom môže byť to, že išlo len o krátkodobý výskum. Taktiež evaluácia písomky značne skreslila výsledky, nakoľko značný dôraz bol kladený na terminológiu, ktorej žiaci pracujúci pri počítači neprípisovali význam. Napriek týmto výsledkom hodnotenia považujeme Cabri Geometry II za efektívny nástroj vyučovania, o čom svedčí najmä veľký záujem zo strany žiakov.

## Záver

Počítač je pre žiakov veľkou motiváciou. Ich postoj k tomuto spôsobu vyučovania je vysoko pozitívny. V oblasti kognitívneho učenia má počítač vyšší efekt u výborných žiakov, ale je stimulom aj pre slabších žiakov. Tí sú často ochotní riešiť na počítači príklady, ktoré by za normálnych okolností buď ani nezačali riešiť alebo ich rýchlo vzdali.

Skúsenosti získané z opísaných experimentov možno zhrnúť nasledovne:

- Výskum ukázal, že Cabri Geometry II je možné použiť pri výklade učiva. V oblasti reprodukovania vedomostí nemusí viesť k lepším výsledkom ako klasická výučba, ale v oblasti transferu nového poznatku sa ukazuje efektívnosť vyššia.
- Využitie počítačov pri výučbe geometrie je vhodné kombinovať s tradičným vyučovaním. Učivo o zhodných zobrazeniach, kde väčšinu času klasickej výučby zaberá nácvik presného rysovania, možno obohatiť prvkami dynamickej geometrie, ktorá poskytuje dostatok priestoru na pochopenie samotnej podstaty zhodných zobrazení ako funkčného vzťahu medzi dvoma objektami.

Na druhej strane - výučba pomocou Cabri Geometry II sa nezdá efektívna pri osvojovaní konkrétnych termínov ako sa to ukázalo aj v našom prípade v experimente č.1.

- Experiment č.1 potvrdzuje všeobecnú tézu o nevyhnutnej zmene kurikula z hľadiska implementácie počítačov do výučby.

V budúcnosti chceme pracovné listy učiva Osová súmernosť využiť pri opakovaní učiva so žiakmi 9. ročníka. Tiež stojí za zváženie zistiť trvácnosť vedomostí žiakov experimentálnej a kontrolnej skupiny v experimente č.2.

### Literatúra

- [1] DROESSAERT, A.: *Transformations with Cabri*, Projekt Socrates/Erasmus students exchange, Pdf TU 2003
- [2] HEJNÝ, M.: *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN, Bratislava 1990.
- [3] TUREK, I.: *Zvyšovanie efektívnosti vyučovania*. Metodické centrum Bratislava, Bratislava, 1997.
- [4] <http://www.pf.jcu.cz/cabri/>, 20.9.2004

### Summary

#### CABRI GEOMETRY - AN INSTRUMENT OF TEACHING OF MATHEMATICS

The goal of the paper was to analyze the results of one experiment of using of didactic software Cabri Geometry for teaching transforms of symmetry and angles on the elementary school.

## PRE ROZVOJ MATEMATIKY, AJ V SLUŽBE NÁBOŽENSTVU

DUŠAN JEDINÁK

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity,  
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 TRNAVA  
e-mail: djedinak@truni.sk

**Abstract:** JEDINÁK, D.: For the Development of Mathematics, Also in Service of Religion. Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2004, no. 8, pp. 31 – 39.

Historical comments about individualities, which lived in religious belief and propagated mathematical culture too.

**Key words:** history of mathematics, mathematical culture.

### Úvod

Každé obdobie ľudských dejín má svoje nezanedbateľné postavy, významné osobnosti. Všimnime si obdobie od 8. až do konca 17. storočia z pohľadu historických poznámok o vývoji matematickej kultúry pre potreby školského vyučovania.

Nebudeme diskutovať o tom, ako bol určený stredovek, ani o tom, či a v akom smere bol temným obdobím ľudstva. Chceme si na stručných poznámkach o živote a diele význačných súvekých osobností naznačiť, že napriek ich pôsobeniu v sutanách (boli príslušníkmi reholí alebo kňazmi cirkvi), mali záujem aj o prírodovedu a dokonca i matematiku.

Vybrali sme osem postáv, ktorých úsilie v nami sledovanom spojení náboženského zamerania s matematickou odbornosťou v dohodnutom období je príznačné. Ani vtedy neboli odvrátené strany viery a vedy neprekonateľné.

### Alcuin z Yorku

York je arcibiskupské sídlo so starou kultúrnou tradíciou a známou kláštornou školou. Tam sa narodil anglosaský učenec **Alcuin (asi 735 – 19. 5. 804)** Vyštudoval a potom prednášal v miestnom kláštore. Od roku 781 viedol kultúrne a školské záležitosti panovníka Karola Veľkého, šíril v jeho ríši vzdelanie (elementárne, artistické i teologické).. Cieľom bolo spájať kresťanský obsah s klasickými znalosťami. Metódou boli otázky a odpovede s ohľadom na proces vnímania, pamäti a obrazotvornosti. Jednou zo zásad bola myšlienka: „*Rozumne sa pýtať, znamená vyučovať.*“ **Alcuin z Yorku** spísal traktáty o gramatike, rétorike, dialektike i muzike, filozofické a teologické spisy i pojednania z histórie. Zvlášť vnímal logiku ako umenie rozumu, ktoré usporadúva poznanie javov ľudských i božských. Od roku 796 bol opäťom v kláštore sv. Martina v Tours, kde vybudoval úspešnú školu pre šírenie vzdelanosti vo Francúzsku.



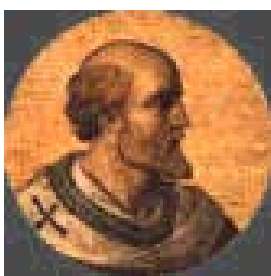
V spise *Úlohy na bystrenie umu mladých* (Propositiones ad acuendos iuvenes) zozbieral 53 počtárskych úloh. Je tam ukázané napríklad riešenie úlohy ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali

po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci. **Alcuin** uvádza riešenie, podľa ktorého bolo zo 100 osôb 11 mužov, 15 žien a 74 detí. Iné z ďalších päť riešení neuvádzal. Súčasťou tejto zbierky úloh je aj príhoda o vlkovi, koze a hlávke kapusty a ich prevoze cez rieku za daných podmienok, výpočet rôznych obsahov, ale aj príklady kombinatorických úloh i rôzne výpočtové zadania a úlohy so základnou logickou úvahou.

Karolínska renesancia priniesla oživenie vzdelávania v starších kláštorňoch školách a začínajúcich školách pri katedrálach. Írsky mních **Alcuin z Yorku** usporiadal zásadné výroky autorít (Beda Venerabilis, Isidor, Boethius, Augustín, Cicero) pre školské potreby. Prispel k celkovej obnove a reforme vzdelania vo Franskej ríši. Ukazuje sa, že aj podnety zo začiatku stredoveku, ktoré sú ešte stále súčasťou školskej matematiky, patria k európskemu kultúrnemu dedičstvu a vytvárajú historické korene rôznych matematických disciplín.



### Gerbert z Aurillacu



Slávnym abacistom (počítanie na „línách“) bol francúzsky počtár **Gerbert z Aurillacu** (asi 930/945 – 1003), neskorší pápež Silvester II. Dostal úplné vzdelanie, mimoriadne prospieval v matematike i astronómii. Osud ho privedol aj do Španielska, kde tento kňaz ako jeden z prvých európskych učencov študoval arabskú matematiku. V tej dobe bola v Cordobe arabská vysoká škola (s bohatou knižnicou arabských, gréckych a latinských textov), kde sa prednášala aj matematika.

**Gerbert** skvele popularizoval dielo Boethiovo, časti Euklidových Základov i praktickú geometriu. Ovládal počítanie na abaku – sčítacej doske. Namiesto kamienkov používal žetóny s číselnými znakmi. V jeho *Knihe o delení čísel a Pravidlách o počítaní na abaku* možno spoznať termíny delenec a deliteľ. V pojednaní *Geometria* (94 článkov) vysvetlil základné pojmy (bod, čiara, plocha, teleso), jednoduché poznatky a metódy výpočtov výšok, hĺbok a vzdialeností. V časti o zememeračských praktikách spomína i počítanie s figurálnymi číslami. Zorganizoval školu v Remeši, kde vyučoval disciplíny kvadrívia (aritmetika, geometria, astronómia, hudba). Okrem matematiky sa zaoberal aj logikou, filozofiou i astronómiou. Napísal pojednania o dialektike, teológii i politike. V Magdeburgu skonštruoval slnečné hodiny, keď predtým skúmal polohu Polárky. Zaoberal sa mnohostranným využitím astrolábu (prístroj na meranie uhlov v súdobej astronómii).

**Gerbert z Aurillacu** ako učenec, výnimočná osobnosť na poli cirkevnom i politickom, posunul západné myslenie bližšie k prameňom antickej filozofie a vedy, podnietil aj záujem o samostatné pozorovanie a skúmanie. Študoval Vergília, uplatňoval novoplatónsky štýl myslenia. Stal sa vplyvným mužom svojej doby, oslňoval všestrannosťou a prenikavosťou svojho umu. Vynikal aj ako široko vzdelaný a originálny učiteľ. Ako učený arcibiskup ravenký radil aj cisárovi Otovi III. (panoval 995 – 1002) a ten ho určil roku 999 za pápeža. **Gerbert** bol prvý Francúz na pápežskom stolci a prijal meno **Silvester II.** V tejto funkcii prispel k organizácii cirkvi v Poľsku i v Uhorsku. V roku 1001 poslal uhorskému kráľovi Štefanovi I. kráľovskú korunu. Vyhlásil za svätého pražského biskupa Vojtecha. S úspechom sa zapísal do dejín cirkvi i matematiky.

Je mimoriadne zaujímavé i podnetné, že k popredným osobnostiam spred tisíc rokov patrí **Gerbert z Aurillacu**, človek mnohostranných kultúrnych záujmov, literatúry, hudby, vedy i matematickej kultúry.

### Roger Bacon

Základom stredovekého štúdia bolo sedem slobodných umení: gramatika, rétorika, dialektika, aritmetika, geometria, astronómia a hudba. Jedným z najkritickejších mužov oxfordskej scholastiky bol

františkánsky mních **Roger Bacon** (asi 1214 – 1294). Dôkladnú znalosť všetkých odborov niekdajšej vedy (matematiky, medicíny, teológie a filozofie) získal v Oxforde a v Paríži (1244 – 1250). Mal značný ohlas ako prírodovedec a univerzálny mysliteľ. Viac ako tridsaťročný vstúpil do reholy františkánov a dôverne sa oboznámil s jej myšlienkovým svetom. Stretol sa s Albertom Veľkým, Alexandrom z Halesu, Bonaventúrom i Tomášom Akvinským. Keď sa jeho priateľ G. Fulconi stal pápežom Klementom IV. (1265 – 1268), požiadal Bacona o zaslanie jeho diela. Za kritiku panovníkov i rádových predstavených sa Bacon dostal do kláštorného väzenia v Paríži aj Oxforde (1271 – 1292). Zomrel opustený a zneuznaný.



**Roger Bacon** zvyrazňoval úlohu znalosti jazykov (hebrejčiny, gréčtiny, arabčiny) pre lepšie pochopenie diel Aristotela, Avicenu i Averroesa, ale aj Biblie. Pri skúmaní prírodných javov požadoval väčší dôraz na pokus, fyzikálnu skúsenosť. „*Bez skúsenosti nemožno nič dostatočne poznať... Iba skúsenosť dáva istotu, a nie logický dôkaz.*“ Sám rozpracoval niektoré fyzikálne idey, napr. v optike, magnetizme a praktickej fyzike (využitie strelného prachu, vízia nových technických prostriedkov). Zovšeobecnenie vnútornej a vonkajšej skúsenosti videl v abstrakcii a matematizácii, ktorú treba následne preveriť v praxi. Na ceste za experimentálnym poznaním podporoval vnútornú intuíciu, šikovnosť rúk a matematické zovšeobecnenie. V optike, astronómii i v teórii hudby odhalil matematickú povahu vecí. Krásu videl prameniť zo svetla a harmónie. V diele *Opus maius* (Väčšie dielo) uvažoval o príčinách ľudskej nevedomosti, o vzťahu medzi filozofiou a teológiou, o využití náuk o jazyku, o význame matematiky a experimentálnom poznaní i o etike. *Opus minor* (Menšie dielo) je súhrn Baconových najhlavnejších myšlienok, *Opus tertium* (Tretie dielo) je prehľad tiež hlavného spisu. „*Filozofia rozvíja božskú múdrosť pomocou vedy a umenia.*“ **Roger Bacon** spájal idealizmus a empirizmus, dôsledne odlišoval teológiu a profánne vedy. Uprednostnil výskum konkrétnych predmetov proti prílišnému odvolávaniu sa na autority. Uznal, že experiment je nielen zdrojom poznania, ale aj rozhodujúcim kritériom pravdivosti. Ľudský rozum a skúsenosť vnímal ako nespochybniteľné autority v oblasti prírodných vied. Zdôrazňoval, že exaktné skúmanie reálnych skutočností spolu s matematickým popisom vedie ku koreňom istoty. Ocenil nevyhnutnosť metodologickej precíznosti, exaktnosti a dôslednosti v overovaní prírodovedných poznatkov.

Matematiku (v širšom a súdobom zmysle) vnímal **Roger Bacon** ako myšlienkový postup najbližší prirodzenému poznávaniu cez skúsenosť a premýšľanie. Matematické úkony sú prístupné už deťom. Pomerne dôrazne naznačil: „*Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.*“ Matematické poznatky vnímal ako základ všetkého vedeckého poznania a odkázal aj nám: „*Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac záhad prírody rozriešime, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať.*“ **Roger Bacon** uprednostnil až mystickú intuíciu, ktorú sa snažil preverovať experimentom a popisovať matematicky. „*Máme dva spôsoby poznávania: špekuláciu (teóriu) a experiment.*“ Pochopil, že prírodné vedy majú viesť ľudí k zdokonaleniu sveta, v ktorom žijeme. Vyznačil význam i úlohy experimentálnych skúseností, aby vychádzajúc z teórie smerovali k matematizácii celého ľudského poznania. „*Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.*“

Aj dnes si uvedomujeme, spolu s Rogerom Baconom, podstatnú odlišnosť zmyslového a rozumového poznania. Vedecké postupy môžu predstavovať premostenie k harmonickej a pevnej syntéze zjavenej viery a ľudského rozumu, aby sme postupne vylúčili príčiny našich omylov, „pretože kým zotrávajú v ľudskom srdci, rozum nemôže uznať pravdu“. Kritický duch Rogera Bacona nám ponúkol zvyraznenie významu experimentálneho a matematického poznávania voči zostarnutým mienkam zdedených autorít. Napriek ťažkému životnému osudu a nepochopeniu zostal **Roger Bacon** verný presvedčeniu, že rozum i viera môžu nájsť oporu v experimentálnej vede i kresťanskej teológii.

## Thomas Bradwardinus

Jedným z významných predstaviteľov oxfordskej školy prírodnej filozofie je aj **Thomas Bradwardinus (asi 1290–26.8.1349)**. Vyštudoval teológiu Merton College na Oxfordskej univerzite, ako františkánsky mních sa stal aj kanonikom (1333) i kancelárom Katedry sv. Pavla v Londýne (1335). Bol aj osobným kaplánom kráľa Edwarda III.



**Bradwardinus** bol presvedčený o tom, že všetky príčiny prírodných javov sa dajú vyjadriť matematicky (pomocou čiar, uhlov, číselných pomerov). Vydal odbornú prácu *O pomeroch rýchlosti pri pohybe* (1328). Skúmal závislosť medzi rýchlosťou a silou, ktorá ju spôsobuje. Uvádza, že rýchlosť je priamo úmerná pôsobiacej sile a nepriamo úmerná odporu, teda hmotnosti a treniu. Z matematiky napísal práce: *Praktická aritmetika*, *O teoretickej aritmetike*, *Teoretická geometria*, *Traktát o spojitosti*. V nich skúmal napríklad aj pravidelné mnohoúhelníky, izometrické vlastnosti kruhu a gule, pomery iracionálnych čísel, vyplňanie priestoru pomocou pravidelných mnohostenov. Zvlášť zaujímavé úvahy viedol **Bradwardinus** o spojitosti (z rokov 1328 – 1335). Uznával, že treba odmietnuť názor o tom, aby kontinuum pozostávalo z konečného počtu nedeliteľných častí, ale aj tvrdenie, že spojité možno dostať ako nekonečne veľa nedeliteľného. „Žiadne kontinuum sa nedá zložiť z nekonečne veľa nedeliteľných.“

V podstate už vo svojej dobe rozlišoval aktuálne a potencionálne nekonečno. V *Traktáte o pomeroch* (1328) jasne odlíšil počítanie s kvantitami veličín od výpočtov s prostými číslami. Pochopil pojem funkcia, jej argument a hodnotu funkcie.

**Thomas Bradwardinus** nesporne prispel k vytváraniu pojmu funkcia, lebo spoznal, že existuje časový priebeh nejakej fyzikálnej veličiny. Pýtal sa, ako prebieha zmena, hľadal medzi zmenami veličín príslušné pomery. Zvlášť citlivo pristúpil k chápaniu spojitého a diskrétného, ktoré leží na rozhraní medzi fyzikou, matematikou a filozofiou. Pohyb chápal ako prechod priestorového kontinua časom. **Bradwardinus** chcel pomocou matematických úvah vysvetliť niektoré vlastnosti základných pojmov priestoru, času a pohybu.

## Mikuláš z Oresme



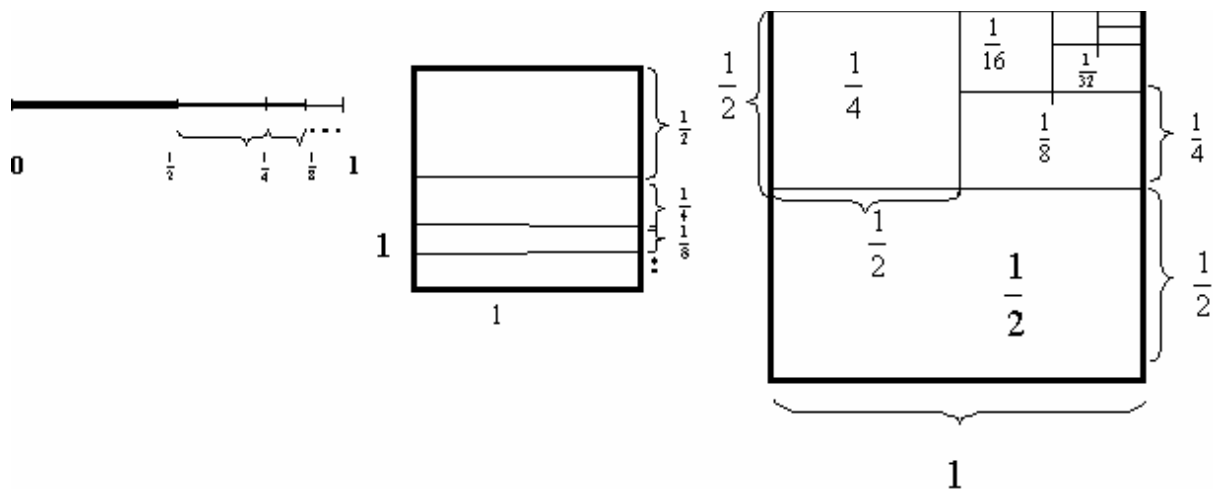
V 14. storočí bol vynikajúcim učencom – matematikom **Mikuláš z Oresme (Nicole Oresme, asi 1323 – 1382)**. V rokoch 1348 až 1361 prednášal na Collège de Navarre v Paríži, prekladal latinské texty do francúzštiny a komentoval ich. Vytváral francúzsku vedeckú terminológiu hlavne v astronómii a geografii. V oblasti matematiky a mechaniky predvídal niektoré pojmy a metódy, ktoré sa uplatnili až v 16. a 17. storočí. V roku 1356 bol vysvätený na kňaza a od roku 1377 bol biskupom v Lisieux v Normandii.

**Mikuláš z Oresme** sa snažil o matematický popis pohybu, uvažoval o možnosti iných svetov aj o rotácii Zeme. V práci *O konfigurácii kvalít* používal geometrické vyjadrenie veličín a ich vzájomné súvislosti. Nad úsečkou znázorňujúcou čas zostrojil „čiaru intenzity pohybu“ a porovnával „formy o premennej šírke.“ V podstate sa jednalo o grafy rýchlosti, kde obsah obrazca vyjadroval veľkosť dráhy.



V spise *Algorismus proportionum* pojednal **Mikuláš z Oresme** o počítaní s mocninami s lomeným mocniteľom a vedel napríklad, že  $8 = 4^{\frac{3}{2}}$  (v našom zápise), pretože  $4^3 = 64$  a  $64 = 8^2$ , t.j. 8 sa nachádza v „poldruhanásobnom pomere“ k 4. V podstate vedel slovné formulovať operácie s mocninami s lomenými exponentmi.

Geometrickou interpretáciou vedel **Mikuláš z Oresme** určovať aj súčet nekonečných radov. Ukázal, že  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$ , pretože „pochopil obrázky“:



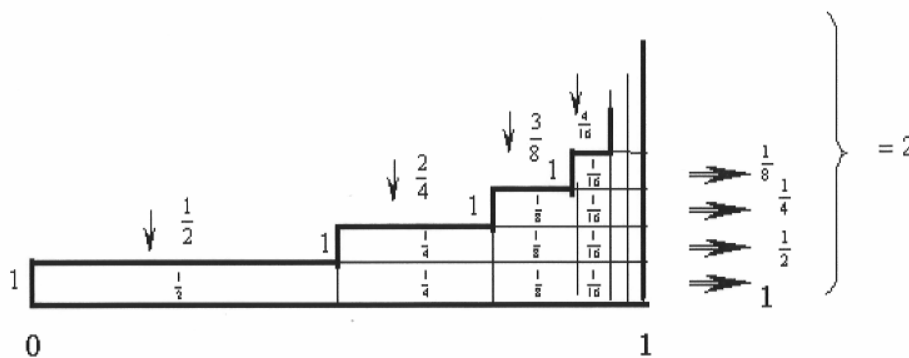
Vtipne predviedol, už v roku 1350, že harmonický rad  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  nemôže mať konečný súčet, lebo (v našom zápise)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}$$

$$> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad > \frac{1}{2} \quad \dots$$

a to znamená súčet blížiaci sa k nekonečnu.

Takýmto obrázkom

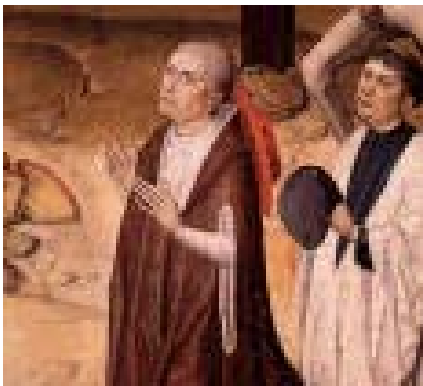


vedel určiť súčet  $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = 2$

Mikuláš z Oresme prispel k stanoveniu závislosti medzi časom a meranou veličinou, grafický záznam priebehu bol už výrazom prírodného zákona. Vytušil úlohu funkčných závislostí (funkcia ako „faustovské číslo“) ako nástroja pre skúmanie prírody a jej merateľných zákonov. Patrí k prvým, ktorý sa nezľakol tajomstiev nekonečna a spoznal, že môže existovať nekonečný útvar s konečným obsahom. Vo svojich úvahách obsiahol niekoľko hlbokých myšlienok matematiky premenných veličín, ktoré však museli počkať, pokiaľ sa neobjavil matematický aparát pre riešenie konkrétnych reálnych problémov fyziky a ďalších technických i prírodných vied.

### Mikuláš Kuzánsky

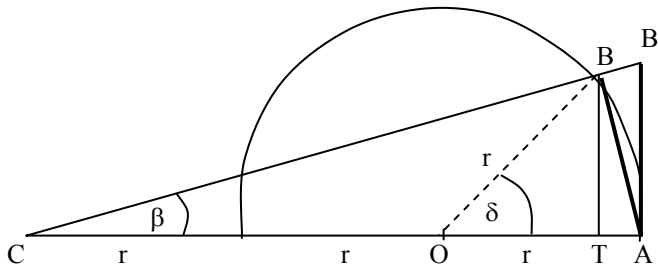
Žil na rozhraní stredoveku a renesancie. Osamotený mysliteľ ovládal súdobé myšlienkové prúdy aj ich antické pramene. Zavŕšil stredovekú teologickú tradíciu, vyzval k vyhodnoteniu empirických faktov poznávaných v prírode. Spoznal, že na pochopenie tajuplných a protikladných vlastností sa najlepšie hodí matematika. Rozlíšil tri stupne poznania. Zmyslové poznanie predkladá základné javy, rozumové spoznáva všeobecné a vytvára čísla, intelektuálno-duchovné poznávanie objavuje súvislosti i súperenie protikladov.



**Mikuláš Kuzánsky (1401–1464)** pochádzal z mestečka Kues na brehu rieky Mosel. Jeho otec Henne Chrypffs bol lodiar a vinár. Po odchode z domova syn používal meno **Nicolas Cusanus**. Vyštudoval právo v Heidelbergu a Padove (1422), nevenoval sa mu, pretože sa rozhodol pre duchovnú dráhu. Stal sa kňazom, neskôr duchovným hodnostárom (kardínal 1448, biskup 1450) a diplomat. Ako pápežský vyslanec bol na koncile v Bazileji (1431) i vo Florencii (1439). Slúžil myšlienke intelektuálnej a náboženskej jednoty kresťanského sveta, koordinoval moc svetskú a duchovnú.

**Kuzánsky** uvažoval aj o prírodných vedách. Uznal, že jednota látky a formy sa uskutočňuje prostredníctvom pohybu. Zem nepokladal za centrum vesmíru, uznával hypotézu jej pohybu. Predpokladal systém a harmóniu vesmíru na základe matematických princípov. Poukázal na potrebu reformovať kalendár, zostavil mapu strednej Európy. Zaviedol meranie pulzu ako pomôcku pre diagnostiku, navrhol okuliare s konkávnymi šošovkami. Bol označovaný aj za milovníka matematiky. Zaujímal sa o približné geometrické konštrukcie. Vedel, že nie je možná presná kvadratura kruhu. Pre postup rektifikácie kružnicového oblúka podal zaujímavý návrh, ktorý bol jednoduchý a pomerne presný, s chybou asi 0,2%.

#### Kuzánskeho aproximácia pre dĺžku kružnicového oblúka



$$\begin{aligned} \text{arc } AB &\approx AB' \\ \text{ak } r = 1 \quad \sin \delta &= BT \\ &\quad \cos \delta = OT \\ AB' &= 3 \cdot \text{tg } \beta \end{aligned}$$

$$\text{Pre } \triangle CTB \text{ platí } \sin \beta = \frac{TB}{BC} = \frac{\sin \delta}{CB} = \frac{\sin \delta}{\sqrt{5 + 4 \cos \delta}},$$

$$\text{ale } CB = \sqrt{(2 + OT)^2} = \sqrt{(2 + \cos \delta)^2 + (\sin \delta)^2} = \sqrt{4 + 4 \cos \delta + \cos^2 \delta + \sin^2 \delta} = \sqrt{5 + 4 \cos \delta},$$

$$\text{potom } AB' = 3 \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 3 \cdot \frac{\sin \delta}{CB} \cdot \frac{1}{\frac{2+OT}{CB}} = 3 \cdot \frac{\sin \delta}{CB} \cdot \frac{CB}{2+OT} = 3 \cdot \frac{\sin \delta}{2 + \cos \delta},$$

napr. pre  $\delta = 45^\circ$  je  $AB' \approx 0,7836\dots$

dĺžka oblúka  $AB = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854\dots$  - chyba asi 0,2%.

Matematika môže byť nástrojom skúmania prírody. Údaje získané z pozorovania a merania vedú k poznaniu pravdy. **Mikuláš Kuzánsky** zistil: „Všetko skúmanie je porovnávaním, lebo používa pomer ako prostriedok... Číslo je výrazom jednoty.. Počet (číslo) znamená pomer. Pomer je myšlienková konštrukcia... Číslo je základ všetkých vecí chápaných myslením... K poznaniu božských vecí je nám otvorená iba cesta prostredníctvom symbolov... Matematika nám najviac pomáha pri pochopení rozličných božských vecí.“ **Kuzánsky** ponúkol už vo svojej dobe systémové a štruktúrne myslenie, v ktorom sa poznávané entity premieňajú vo vzájomných väzbách. Celok v jednote mnohosti spája aj protiklady. Filozoficky si všimol problém aktuálneho nekonečna, dialektiku spojitého a diskrétného, jednoty a mnohosti, možnosti a uskutočnenia, bytia i nebytia. Vytušil zhodu protiv vo vyššom pohľade, v najvyššom existujúcom bytí. V práci **O učenej nevedomosti** (*De docta ignorantia*, 1439–1440) si uvedomil, že naša principiálna neschopnosť úplného poznania („*Intelekt, ktorý nie je pravdou, nikdy nepochopí pravdu tak presne, že by postupom do nekonečna nemohla byť pochopená presnejšie.*“) je základom ľudskej učenej nevedomosti o podstate sveta.

### Luca Pacioli

Jednou z prvých tlačených matematických kníh vôbec, s charakterom encyklopédie matematických vedomostí svojej doby, bola z roku 1494 *Suma znalostí z aritmetiky, geometrie, pomerov a úmerností*, napísaná po taliansky, rozdelená do piatich častí {aritmetika, zememeračstvo, kupecké počty (3 časti)}. Autor **Luca Pacioli** tu nazýva algebru vyšším umením a kladie ju do základov každého počítania. Zaviedol aj označenie znamienok plus  $\tilde{p}$  a mínus  $\tilde{m}$ , neznámu označoval  $co$ , jej druhú mocninu  $ce$ , tretiu mocninu  $cu$ . Odmocninu označoval písmenom R (z latinského radix – koreň). Bez dôkazu vyslovil pravidlá o násobení záporných čísel. Popísal aj pravidlá pre operácie s druhými odmocninami, vedel dokázať, že  $\sqrt{10} + \sqrt{40} = \sqrt{90}$ . Zaujímavé je určite aj to, že na určenie odmocniny používal postupné približné vyjadrenia zo vzťahu  $\sqrt{N} = p + \frac{N - p^2}{2p}$ , kde  $p$  je získaná približná hodnota a  $N$  dané číslo.

Spomínaná *Suma* sa stala prvou základnou matematickou prácou v 15. storočí.

	2	7	8	3	
9	0 / 6	2 / 1	2 / 4	0 / 9	3
	0 / 4	1 / 4	1 / 6	0 / 6	2
0	0 / 8	2 / 8	3 / 2	1 / 2	4
	1	6	9	2	

Možno aj dnes zaujme spôsob, akým **Luca Pacioli** násobil „po štvorcoch“. Z uvedeného obrázku by ste na to mohli prísť. V tom čase vedel **Pacioli** násobiť aspoň ôsmimi spôsobmi. Zásľuhu si získal aj tým, že rozšíril dnešný spôsob delenia viacciferných čísel. Neskôr zostavil aj zbierku zaujímavých úloh „pre bystré hlavy“. Veľmi známym sa stalo jeho prehlásenie: **Zlato sa skúša ohňom a talent matematikou.**

**Luca Pacioli (asi 1445 – 1514)**, mních františkánskej reholi, profesor matematiky vo Florencii, Ríme, Neapoli i v Benátkach a učiteľ i priateľ Leonarda da Vinci vyjadril úžas nad „zlatým rezom“ (rozdelenie úsečky na dve časti tak, že pomer dĺžky pôvodnej úsečky k väčšej časti je rovnaký ako pomer dĺžky väčšej časti k menšej) až tridsiatimi prídavnými menami. Tento pomer nesie aj označenie divina proportio – božský pomer. Vydal o ňom pojednanie (r. 1509) s ilustráciami Leonarda da Vinci. „Zlatý rez pôsobí na nás podstatne zvláštne, nepopísateľne,.... najdôstojnejšie.“



### Bonaventura Cavalieri

Taliansky matematik **Bonaventura Cavalieri (asi 1598 – 27. 9. 1647)** si predstavoval teleso ako súbor úzkych rovnobežných „nedeliteľných“ rovinných rezov. Podobne môžeme chápať rovinný útvar ako súbor nekonečného počtu nekonečne tenkých rovnobežných už ďalej „nedeliteľných“ úsečiek. Potom **Cavalieriho princíp** v rovinnom vydaní, môže znieť: Nech sú dané dva rovinné útvary  $A$ ,  $B$  a priamka  $p$  tak, že každá rovnobežka  $q$  rovnobežná s  $p$  pretína útvary  $A$ ,  $B$  v úsečkách, ktorých pomer dĺžok je konštantný (rovnajúci sa konštante  $c$ ). Potom aj pomer obsahov týchto rovinných útvarov  $A$ ,  $B$  je rovnaký (rovný konštante  $c$ ). **Cavalieriho princíp** nám pomáha pri určovaní plošných obsahov rovinných útvarov a objemov telies porovnávaním ich rovnobežných rezov s rovnakými rezmí plôch a telies, ktorých obsah či objem už poznáme.

**Francesco Bonaventura Cavalieri**, niekedy tiež **Cavalerio**, získal dobré humanitné vzdelanie.



Pätnásťročný vstúpil do rádu kolombínov. Veľmi dobre ovládal grécky i latinský jazyk. Preštudoval diela mnohých antických autorov, medzi nimi i práce od Archimeda, Apollónia, Pappa a ďalších. Po príchode do kláštora v Pise (1616) sa stal obľúbeným žiakom matematika a astronóma Castelliho. Tam spoznal aj Galileu Galileiho, ktorý ocenil jeho matematické vedomosti. **Cavalieri** už vtedy dokazoval niektoré Archimedove tvrdenia novým spôsobom. Vysvetľoval vznik priamky pohybom bodu, vznik roviny pohybom priamky, napr. knihu, vnímanú ako teleso si predstavoval ako zloženinu rovnobežných listov. **Cavalieri** skladal plochy z „nedeliteľných“ úsečiek, telesá z „nedeliteľných“ rovín. Okolo roku 1620 zdokonalil základy tejto svojej metódy. Vo svojich odborných prácach rozvinul myšlienky, ktoré viedli k vzniku infinitezimálneho počtu. Jeho **Geometria indivisibilium continuorum quadam ratione promota** (1635) podnietila mnohých matematikov k štúdiu problémov dnešného diferenciálneho a integrálneho počtu.

**Cavalieri** vydal aj knihu o uplatnení logaritmov v astronomických výpočtoch (1632) a zbierku úloh o používaní logaritmov v rôznych oblastiach vtedajšej náuky (1639). Študoval súvislosti medzi geometrickou optikou a teóriou kuželosečiek. Vydal aj spis o trigonometrii (1643) a celý rad ďalších pojednaní. V roku jeho úmrtia vyšla publikácia „*Sest' etúd o geometrii*“, kde rozvinul a doplnil svoje predstavy „metódy nedeliteľných“ (bod je nedeliteľný pre čiaru, čiara je nedeliteľná pre rovinu, rovina je nedeliteľná pre teleso; nedeliteľné je schopné vytvárať pohybom kontinuum priestoru o jeden rozmer väčšieho; porovnávanie nedeliteľných je užitočné) pre postupy na určovanie obsahov a objemov. **Bonaventura Cavalieri** predurčil cestu k užitočnému integrálnemu počtu.

**Cavalieriho princíp** (*Dve telesá rovnakej výšky majú rovnaký objem, ak ich rovinné rezy v rovnakej výške majú vždy rovnako veľkú plochu. Ešte všeobecnejšie: Ak pre dve telesá existuje taká rovina, že každá*

s ňou rovnoběžná rovina pretína tieto telesá v útvaroch s rovnakým obsahom, tak objemy týchto telies sa rovnajú.) zostane trvalou spomienkou ako príklad toho, že aj pojmy zo začiatku nepresné a nejasné môžu v priebehu ďalšieho vývoja vedy viesť niekedy k správnym a užitočným poznatkom. V súčasnom

vyjadrení môžeme uznať, že **Cavalieri** vedel dokázať tvrdenie 
$$\int_0^a x^n \cdot dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

pre  $n = 2, 3, \dots, 9$  a tušil, že to platí pre každé prirodzené  $n$ . Napriek tomu, že v jeho metódach neboli všetky pojmy a úvahy úplne jasné a presné, aj tak položil hlboké základy práce s nekonečne malými veličinami a podstatne ovplyvnil ďalší rozvoj matematických disciplín. Významný taliansky matematik a fyzik **E. Torricelli** (1608 – 1647) ocenil Cavalieriho vedecké výsledky slovami: „*Nová teória nedeliteľných je v rukách učencov ako zázrak vedy a ukázala svetu, že vek Archimeda a Euklida bol iba mladými rokmi pre našu zrelú geometriu... Je nespochybniteľné, že Cavalieriho geometria je udivujúcim prostriedkom na efektívne hľadanie matematických tvrdení. Je to určite kráľovská cesta v húštine matematického trnia.*“

### Záver

Už od dôb stredovekých univerzít sleduje ľudské poznávanie prehľbujúci sa jednotný princíp na pozadí pestrosti foriem a javov, ktoré vnímame zmyslami a spracúvame tvorivým duchom. Naša moderná doba prináša dostatok argumentov pre úžas nad harmóniou prírodovedného systému, ktorý spracúvame naším myšlienkovým modelovaním, kde má nezastupiteľnú úlohu práve matematika.

### Literatúra

- [1] BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika v 16. a 17. století*. Praha: Prometheus, 1999.
- [2] BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Praha: Prometheus, 2001.
- [3] HRUŠOVSKÝ, I. a kol.: *Patristika a scholastika*. Bratislava: PRAVDA, 1975.
- [4] JURINA, J.: *Stručný přehľad dejín kresťanskej filozofie – Stredovek*. Trnava: Dobrá kniha, 2002.
- [5] JUŠKEVIČ, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1978.
- [6] KRATOCHVÍL, Z.: *Mýtus, filosofie, věda I., II*. Praha: Jüza, 1996.
- [7] MAČÁK, K.: *Tři středověké sbírky matematických úloh*. Praha: Prometheus, 2001.
- [8] MICHALOV, J.: *Scholastická filozofia*. Nitra: FF UKF, 2002.
- [9] SIROVIČ, F.: *Dejiny filozofie - stredovek*. Trnava: Dobrá kniha, 1995.
- [10] STÖRING, H.J.: *Malé dějiny filozofie*. Praha: ZVON, 1995.
- [11] STRUIK, D.J.: *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963.

### Summary

#### FOR THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS, ALSO IN SERVICE OF RELIGION

The history of evolution of mathematical cognition should have been an inseparable part of mathematical education.

## NÁSTRAHY CABRI GEOMETRIE II

KATARÍNA ŽILKOVÁ

Gymnázium sv. Cyrila a Metoda,  
Farská 17, 949 01 Nitra  
e-mail: katarina@zilka.sk

**Abstract:** ŽILKOVÁ, K.: Possible Problems of Cabri Geometry II. Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2004, no. 8, pp. 40 – 44.

The contribution deals with benefits and problems, which can occur in realization of some secondary school tasks of planimetry in Cabri geometry II.

**Key words:** Cabri, geometry, intersection, construction, implementation, square, rotation, transformation

### Úvod

V riešení planimetrických úloh spravidla skúmame vlastnosti geometrických útvarov, zisťujeme a vyšetrujeme vzájomné logické vzťahy medzi objektmi vstupujúcimi do konštrukcie, vyhľadávame vzájomné súvislosti, resp. nadväznosti a vyvodzujeme závery, ktoré v konečnom dôsledku vyústia do konštrukčnej realizácie úlohy, dôkazu a diskusie. V tomto zmysle môžeme hovoriť o „investigatívnej“ geometrii (z angl. *investigate* = *preskúmať*, *vyšetrovať*, *vyhľadávať*, *zisťovať*, *skúmať*), v ktorej sa snažíme riešiť úlohu čo najvšeobecnejšie, preskúmať všetky konfiguračné rozloženia určujúcich útvarov vplývajúce na počet a polohu riešení úlohy. Cabri geometria spravidla dokáže okamžite reagovať na naše požiadavky a vždy aktualizovať výslednú konštrukciu zmenou závislých útvarov od vstupných určujúcich prvkov a ich atribútov. Konštrukcia vytvorená v Cabri umožňuje aj vyšetrovanie hraničných a špeciálnych prípadov, čím dodáva do vyučovania prvky experimentátorstva, objaviteľstva, zážitkovosti, zvedavosti, zaujímavosti až napokon dramatickosti a určitého napätia. Napriek uvedeným výhodám sú v Cabri geometrii isté úskalía, ktorých neočakávaný výskyt môže spôsobiť užívateľovi nepríjemnosti.

### Úloha a jej matematizácia

*Daný je štvorec ABCD a jeho vnútorný bod M. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky KLM, ktoré majú vrcholy K, L na hranici štvorca.*

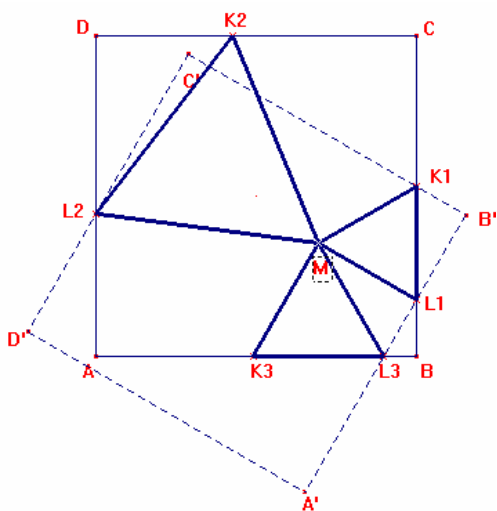
Zadanie patrí k tradičným konštrukčným úlohám rovinnej geometrie a jej matematické riešenie je založené na otočení. Ide o transformáciu daného štvorca ABCD na štvorec A'B'C'D' aplikáciou otočenia  $R(M, 60^\circ)$  v kladnom aj zápornom zmysle. Hľadaný bod K, resp. L je lokalizovaný na priesečníkoch hraníc štvorcov ABCD a A'B'C'D'. Záverečné doplnenie na rovnostranný trojuholník KLM je triviálne.

### Realizácia v Cabri

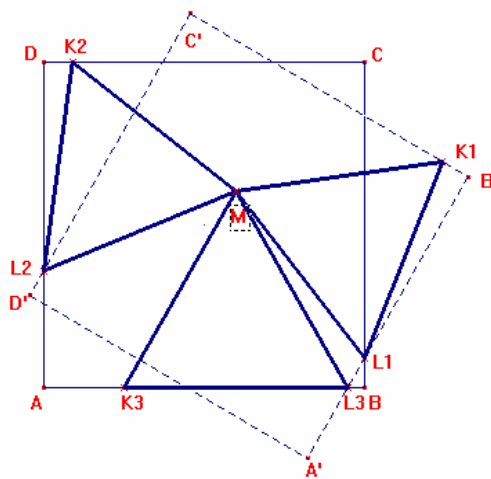
Zostrojenie štvorca ABCD, bodu M a aplikácia transformačného zobrazenia  $R(M, 60^\circ)$  na daný štvorec ABCD je v Cabri pomerne jednoduché a ľahko zvládnuteľné. Pre prehľadnosť uskutočníme konštrukciu

len v jednom smere (proti smeru chodu hodinových ručičiek). Skutočnosť, že štvorce  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$  môžu mať rôzny počet spoločných priesečníkov je pre realizáciu riešenia v geometrickom systéme Cabri zásadnou.

Ak začneme konštrukciu implementovať tak, ako sme zvyknutí na papieri, alebo na tabuli, t. j. konkrétne na fixovaných a stabilizovaných určujúcich útvaroch, tak pri zmene polohy týchto útvarov sa ďalšie riešenia nemusia ukázať, resp. aj tie ktoré boli pôvodne zostrojené môžu byť chybné. Neskúsený užívateľ môže vytvoriť konštrukciu (Obr. 1), ktorá na prvý pohľad spĺňa všetky podmienky úlohy, avšak po zmene polohy daného bodu  $M$  (Obr. 2) sa zdanlivo správne riešenia úplne rozpadnú. Niektoré trojuholníky  $KLM$  nevyhovujú stanoveným podmienkam úlohy (napr.  $K_1L_1M$ , Obr. 2), prípadne niektoré sa vôbec nezobrazia, hoci evidentne existujú aj ďalšie priesečníky štvorcov  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$ , a teda mali byť zobrazené aj ďalšie trojuholníky typu  $KLM$ . V tomto prípade sa nedá využiť interaktivita Cabri geometrie a úloha je vyriešená len pre jednu konkrétnu situáciu. To znamená, že sa potlačila zásadná prednosť Cabri geometrie a popísané riešenie sa ničím nelíši od tradičného riešenia na tabuli.



Obr. 1: Nevhodná východisková poloha určujúcich útvarov pri realizácii konštrukcie v Cabri.



Obr. 2: Výsledok po zmene polohy bodu  $M$ , ak je konštrukcia nesprávne implementovaná.

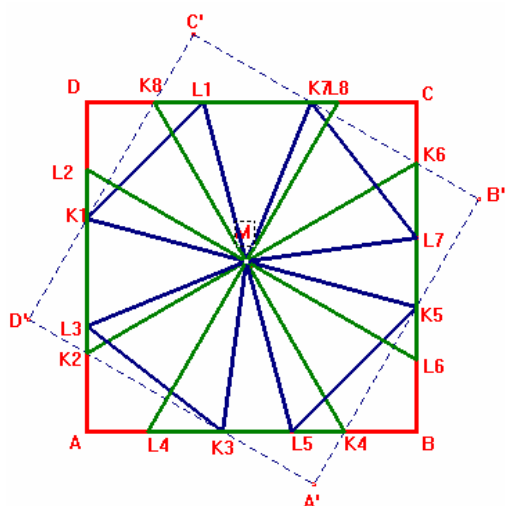
Každú konštrukčnú úlohu v Cabri treba riešiť čo najvšeobecnejšie. V našej úlohe môže mať štvorec  $ABCD$  s otočeným štvorcem  $A'B'C'D'$  najviac osem spoločných priesečníkov a teda treba nasimulovať túto situáciu a vyznačiť všetky vzniknuté riešenia (Obr. 3). Následným pohybom bodu  $M$  sa riešenia aktualizujú (niektoré „vypadnú“), pretože sa stratia spoločné priesečníky (Obr. 4). Takto môžeme konfrontovať všetky žiacke riešenia a uskutočniť diskusiu vzhľadom na rôzne polohy daných útvarov.

Je veľmi dôležité zvoliť si zadanie určujúcich prvkov vhodne. V uvedenom kontexte stačí malá chybička v realizácii konštrukcii v Cabri geometrii a môžeme byť svedkami nemilého prekvapenia pri zmene polohy niektorého z určujúcich prvkov úlohy.

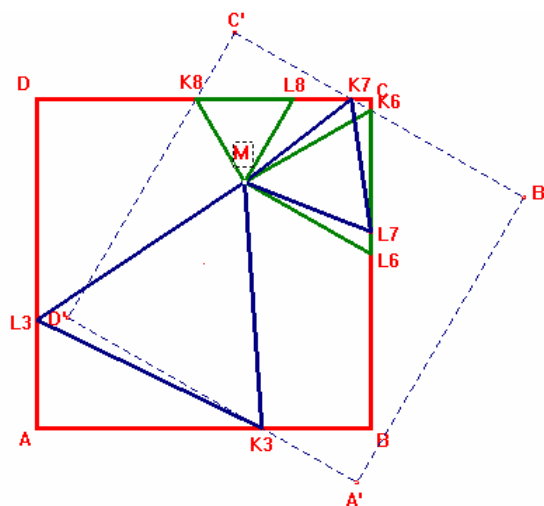
### Problém priesečníkov

Pri používaní Cabri geometrie sa môžu objaviť aj nedostatky, ktoré nie sú spôsobené neskúsenosťou užívateľa. Napriek maximálnej snahe riešiť úlohu všeobecne sa po experimentovaní so základnými prvkami riešenej úlohy vyskytlo také rozloženie určujúcich prvkov, pri ktorom sa opäť nezobrazilo jedno riešenie (Obr. 5). Viditeľne existujú dva priesečníky hraníc štvorcov  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$ , pričom je zostrojený len jeden rovnostranný trojuholník  $K_6L_6M$ . Pri implementácii nášho riešenia sme definovali maximálny počet priesečníkov, ktoré môžu hranice štvorcov  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$  mať. *Ako je možné, že*

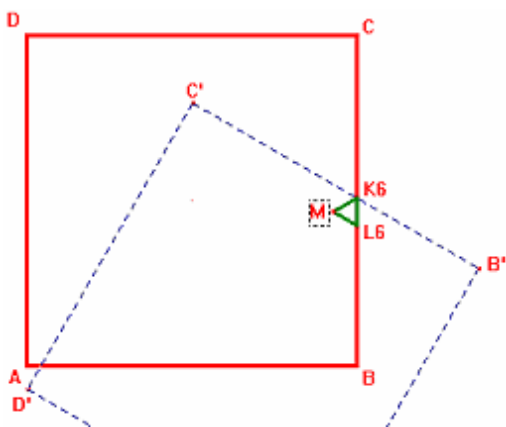
sa objavil priesečník, ktorý akoby nebol definovaný, nemá priradené pomenovanie  $K_i$  a nezobrazil sa príslušný rovnostranný trojuholník?



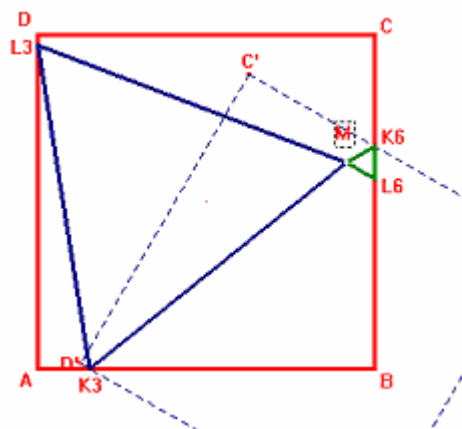
Obr. 3: Správne realizovaná konštrukcia v Cabri.



Obr. 4: Aj po zmene polohy bodu M dostávame správne riešenia.



Obr. 5: Problém existencie priesečníka úsečiek AB a  $C'D'$ .



Obr. 6: Bod  $K_3$  je definovaným priesečníkom úsečiek AB a  $A'D'$ .

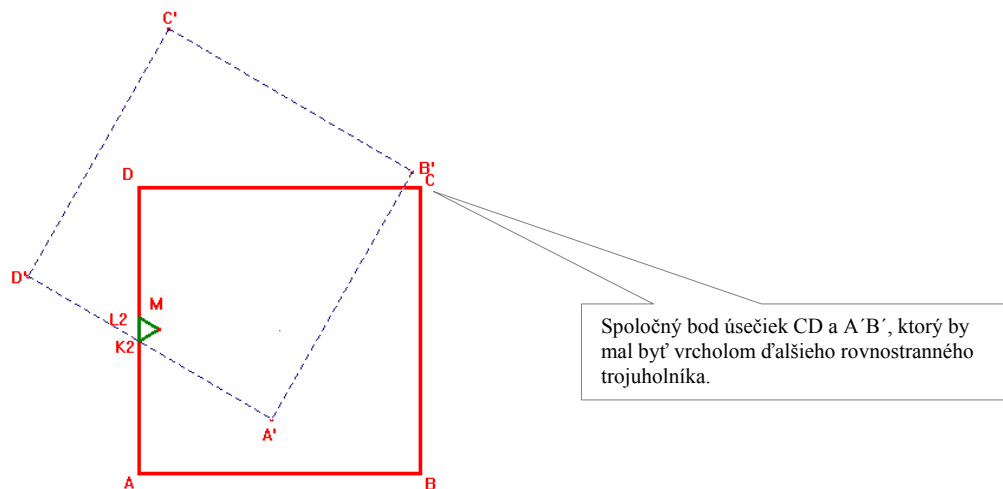
Pri hľadaní odpovede na položenú otázku sa vrátíme k realizácii konštrukcie. Jednotlivé body  $K_i$  sú konštruované výberom atribútu „priesečník“, avšak Cabri neoboznamuje užívateľa o tom, či ide o priesečník hraníc štvorcov, alebo priesečník niektorých úsečiek. Ak by dokázala Cabri geometria pracovať so štvorcom ABCD ako s celkom (v programátorskej terminológii s objektom), potom by vedela rozlíšiť a vyznačiť aj „stratený“ priesečník na ( Obr. 5). Systém zrejme vyznačuje priesečníky úsečiek.

Napríklad bod  $K_3$  je priesečníkom úsečky AB a  $A'D'$ , bod  $K_4$  je spoločným bodom úsečiek AB a  $A'B'$  (Obr. 3). Iné priesečníky hraníc štvorcov ABCD a  $A'B'C'D'$  v zobrazenom rozložení neexistujú. Po zmene polohy bodu M sa mení aj poloha priesečníkov  $K_3$ ,  $K_4$ , (Obr. 4), pričom môžu aj zaniknúť. V rozložení na ( Obr. 5) vznikol priesečník úsečiek AB a  $C'D'$ , ktorý nebol explicitne určený. Preto nie je ani



pomenovaný a de facto pre Cabri neexistuje. Po malej zmene polohy bodu M (Obr. 6) sa aktualizuje priesečník  $K_3$  úsečiek AB a  $A'D'$ . Situácie rovnakého druhu sa dajú nasimulovať na každej strane štvorca ABCD (napr. Obr. 7). Problém je možné riešiť dodatočným pomenovaním novo-vzniknutých priesečníkov  $K_i$  a doplnením kompletného riešenia  $K_iL_iM$ . Bežný užívateľ Cabri geometrie neočakáva výskyt problému tohto druhu, a tak môže byť sklamaný pri predvádzaní svojej konštrukcie a náhodnom zobrazení situácie, v ktorej sa niektoré riešenia neukážu.

Jadro problému zrejme spočíva v tom, že Cabri geometria vo svojej podstate pracuje na základe analytického vyjadrenia základných geometrických útvarov a vzťahov. Implementovaný štvorec nechápe ako samostatný celistvý objekt, ale rozkladá ho na štyri samostatné, analyticky jednoznačne určené úsečky.



Obr. 7: Chýbajúce riešenie.

Pri vyučovaní školskej geometrie, podľa M. Hejného, treba mať na zreteli tri hľadiská: obsahové, metodické a psychologické (Hejný, 1990, s. 324). Cabri geometria môže prispieť pri činnostiach z metodického hľadiska, akými sú experimentovanie, tvorba a preverovanie hypotéz. Z psychologického hľadiska podporuje predstavivosť, tvorivosť a nepriamo aj schopnosť argumentovať a abstrahovať. Na strednej škole pri riešení konštrukčných úloh je potrebné dbať nielen na intuíciu nájdenú konštrukciu, ale aj na zápis, dôkaz a diskusiu ako organickú súčasť riešenia, ktorá napomáha rozvoju upresňovania pojmov, myslenia a vyjadrovania. Na vyššom stupni rozvoja geometrického myslenia žiakov a pri naplňaní ďalších vyučovacích cieľov, ktorými sú hlbšie pochopenie vzťahov a súvislostí, môže Cabri geometria odbúraním opakovaného manuálneho rysovania byť efektívnym vyučovacím prostriedkom a môže pozitívne ovplyvňovať schopnosť uceleného pohľadu na riešenie konštrukčných úloh.

## Literatúra

- [1] HECHT, T. - SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. Bratislava: SPN, 1992, 243 s., ISBN 80-08-00340-5.
- [2] HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava : SPN, 1990, 554 s., ISBN 80-08-01344-3.
- [3] SMIDA, J. - ŠEDIVÝ, J. a kol.: *Matematika pre 1. ročník gymnázia*. Bratislava: SPN, 1990, 294 s., ISBN 80-08-00939-X.
- [4] ŽILKOVÁ, K.: *Heuristika v informatizácii výučby matematiky* (Rigorózna práca). Nitra: FPV UKF, 2004, 75 s.

## Summary

### POSSIBLE PROBLEMS OF CABRI GEOMETRY II

Cabri geometry is determined by its characteristics, which can effective teaching of planimetry in secondary school maths. Some problems can occur while implementing construction tasks. The problem affect the number of solutions and their projections.

## OBSAH

<b>HOLEŠOVÁ M.:</b> O MONOMIÁLNYCH KRIVKÁCH $C(2K-1, 2K+1, 3K)$ .....	5
<b>POKORNÝ, M.:</b> <i>A NOTE ON INTEGRAL BALANCED ROOTED TREES OF DIAMETER 10</i> .....	13
<b>ABAS, A. – ŠIŠOLÁK, F.:</b> <i>SO EXISTENCII MONOTÓNNYCH RIEŠENÍ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE</i> $x''(t) + ax'(t) + bx(t-h) = 0$ . .....	16
<b>ZALABAI, Z. - POKORNÝ, M.:</b> VIAZANÉ EXTRÉMY (2 ČASŤ) .....	20
<b>SOTÁKOVÁ, K.:</b> CABRI GEOMETRIA – POMÔCKA PRI VYUČOVANÍ MATEMATIKY ...	26
<b>JEDINÁK, D.:</b> PRE ROZVOJ MATEMATIKY, AJ V SLUŽBE NÁBOŽENSTVU .....	31
<b>ŽILKOVÁ, K.:</b> NÁSTRAHY CABRI GEOMETRIE II .....	40

*Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis*

Séria C – MATEMATIKA, FYZIKA, INFORMATIKA

Ročník 8, 2004

Technický redaktor: Mgr. Viola Gazdíková, PhD.

Obálka: doc. Blažej Baláž

Vydala Trnavská univerzita, Pedagogická fakulta

ISBN 80 – 8082 – 014 – 7